



Universidad
Carlos III de Madrid
www.uc3m.es

TESIS DOCTORAL

Gráficos de control EWMA adaptativos con parámetro de suavizado variable en el tiempo

Autor:

Willy Ericson Ugaz Sánchez

Directores:

Ismael Sánchez y Andrés Alonso

DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA



TESIS DOCTORAL

Gráficos de control EWMA adaptativos con parámetro de suavizado variable en el tiempo

Autor: *Willy Ericson Ugaz Sánchez*

Directores: **Ismael Sánchez y Andrés Alonso**

Firma del Tribunal Calificador:

Firma

Presidente: Daniel Peña Sánchez de Rivera

Vocal: Alberto José Ferrer Riquelme

Secretario: María Jesús Sánchez Naranjo

Calificación:

Leganés, a 19 de diciembre de 2016

UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID

DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA

DOCTORADO EN INGENIERÍA MATEMÁTICA



TESIS DOCTORAL

**Gráficos de control EWMA adaptativos con parámetro de suavizado
variable en el tiempo**

Autor:

Willy Ericson Ugaz Sánchez

Directores:

Ismael Sánchez Rodríguez-Morcillo

Andrés Modesto Alonso Fernández

27 de noviembre de 2016

Jurado asignado:

Presidente: Daniel Peña Sánchez de Rivera

Secretario: María Jesús Sánchez Naranjo

Vocal: Alberto José Ferrer Riquelme

Directores:

Ismael Sánchez

Andrés Alonso

Ami familia.

Índice general

Agradecimientos	V
Lista de tablas	VII
Lista de figuras	IX
Resumen	XIII
1. Control de la media y de la variabilidad-Antecedentes	1
1.1. Introducción	1
1.2. Gráficos de control de la media	2
1.2.1. Gráfico de control \bar{X} con muestras independientes	6
1.2.2. Gráficos de control con memoria	12
1.2.3. Gráficos de control adaptativos para la media	20
1.3. Gráficos de control de la variabilidad	29
1.3.1. Gráficos de control S y S^2 con muestras independientes	32
1.3.2. Gráficos de control con memoria para la variabilidad	37
1.3.3. Gráficos de control adaptativos para la variabilidad	50
2. Gráficos de control AEWMA con parámetro de suavizado variable en el tiempo	55
2.1. Introducción	55
2.2. Gráfico de control AEWMA con λ_t basado en la última observación x_t	58
2.2.1. Gráfico de control AEWMA1	59
2.2.2. Gráfico de control AEWMA2	61
2.2.3. Gráfico de control AEWMA3	63
2.3. Cálculo del ARL usando el enfoque de cadenas de Markov	64
2.4. Gráfico EWMA adaptativo basado en el valor del estadístico de control	67
2.5. Cálculo del ARL del AEWMA4 usando el enfoque de cadenas de Markov	69
2.6. Comparaciones	69

2.6.1.	Resultados con $ARL_0=100$	70
2.6.2.	Resultados con $ARL_0=500$	72
2.7.	Conclusiones	76
3.	Gráficos de control AEWMA-S^2 con parámetro de suavizado variable en el tiempo	81
3.1.	Introducción	81
3.2.	Gráficos de control AEWMA- S^2 con λ_t basado en M_t	85
3.2.1.	Gráfico de control AEWMA1- S^2	86
3.2.2.	Gráfico de control AEWMA2- S^2	88
3.2.3.	Gráfico de control AEWMA3- S^2	88
3.3.	Cálculo del ARL usando el enfoque de cadenas de Markov	89
3.4.	Gráfico de control AEWMA- S^2 basado en el valor del estadístico de control . . .	94
3.5.	Cálculo del ARL del gráfico AEWMA4- S^2 usando el enfoque de cadenas de Markov	95
3.6.	Comparaciones	96
3.7.	Conclusiones	99
	Conclusiones y Extensiones	103
	Conclusiones	103
	Extensiones	104
	Bibliografía	107

Agradecimientos

Parece que fue ayer cuando emprendí esta “gran aventura” y como todo en la vida llega a su fin, es tiempo de cerrar esta inolvidable etapa en la que he vivido una experiencia enriquecedora tanto en el aspecto personal como profesional. Ha sido un camino duro de recorrer, sin embargo, gracias a Dios, nunca me he sentido solo. Es por eso que, en estas cortas líneas, quisiera extender unas palabras de agradecimiento a aquellas personas que de alguna u otra forma me han apoyado para sacar adelante esta tesis.

En primer lugar, mi más profundo y sincero agradecimiento a mis directores de tesis Ismael Sánchez y Andrés Alonso por su dedicación plena a pesar de todas las dificultades, valiosas sugerencias y enseñanzas, supervisión continua, exigencia y dosis de motivación durante todo el tiempo de desarrollo de esta tesis. Muchas gracias por haberme permitido aprender de UDS.

Debo agradecer de manera especial a mi esposa Xiaolin Ayón por estar siempre conmigo cuando le he necesitado, en los momentos buenos y sobre todo en los momentos difíciles; su apoyo incondicional, tanto en lo personal como académico y familiar, ha sido clave para poder terminar esta tesis. A mis padres Esther y Víctor mil gracias por sus oraciones para que todo vaya bien. A mis hermanos, especialmente a Karina y en general a toda mi familia muchas gracias.

Quisiera hacer extensiva mi gratitud al Departamento de Estadística de la Universidad Carlos III de Madrid por la financiación y por facilitarme los medios necesarios para llevar a cabo este trabajo. No puedo dejar de agradecer al equipo de profesores de la Maestría en Ingeniería Matemática por todas sus enseñanzas; mi total agradecimiento al equipo de profesores del departamento, en especial a Javier Prieto, Javier Nogales, Michael Wiper, Rosa Lillo, Daniel Peña, Ignacio Cascos, David Delgado, Pedro Galeano con el perdón de aquellos a quienes no he nombrado. Por supuesto, dar muchas gracias al personal administrativo del departamento: Gema, Susana y Paco por su amabilidad y disponibilidad cada vez que he necesitado de ellos desde el primer día que llegué al departamento. A mis compañeros de estudios de maestría y doctorado por todos los momentos que hemos pasado y por todo su apoyo cuando les he necesitado, en especial a Diego por su siempre disposición a escuchar y ayudar. Un especial agradecimiento a la Universidad de Piura, Perú, por su apoyo no sólo financiero, a Dante Guerrero, Isabel Chiyón, Susana Vegas, Martín Palma, Eduardo Sánchez, Reynaldo Villar y Eliodoro Carrera, con el perdón de aquellos que no estoy mencionando, muchas gracias. Por supuesto y sin ánimo de ser repetitivo a Ismael Sánchez y a su esposa Isabel González quienes hicieron el primer contacto conmigo en Perú antes de venir a España. Por todo su apoyo y por hacer de mi estancia más agradable mientras estuvieron aquí.

A TODOS LOS QUE SE SIENTAN MENCIONADOS EN ESTA DEDICATORIA MIL GRACIAS.

Índice de tablas

2.1.	Valores mínimos del ARL para cada cambio $\delta\sigma$ y el correspondiente λ	57
2.2.	Valores óptimos de los parámetros de los gráficos AEWMA. $ARL_0 = 100$	67
2.3.	Valores óptimos de los parámetros de los gráficos AEWMA. $ARL_0 = 500$	67
2.4.	Valores de ARL óptimos con $ARL_0 = 100$	67
2.5.	Valores de ARL óptimos con $ARL_0 = 500$	68
2.6.	Valores óptimos de los parámetros de los gráficos AEWMA.	69
2.7.	Valores óptimos de ARL.	70
2.8.	Valores del ARL con $ARL_0 = 100$. Se consideran: AEWMA1-1 (1-1), AEWMA2-1 (2-1), AEWMA3-1 (3-1), AEWMA1-1 (4-1), AEWMA1-2 (1-2), AEWMA2-2 (2-2), AEWMA3-2 (3-2), AEWMA4-2 (4-2), EWMA1 (E-1), EWMA2 (E-2), Shewhart (S-1), AEWMA-CM-1 (CM-1) y AEWMA-CM-2 (CM-2).	71
2.9.	Valores del ARL con $ARL_0 = 500$. Se consideran: AEWMA1-1 (1-1), AEWMA2-1 (2-1), AEWMA3-1 (3-1), AEWMA1-1 (4-1), AEWMA1-2 (1-2), AEWMA2-2 (2-2), AEWMA3-2 (3-2), AEWMA4-2 (4-2), EWMA3 (E-3), EWMA4 (E-4), Shewhart (S-2), AEWMA-CM-3 (CM-3), AEWMA-CM-4 (CM-4), ACUSUM-J-1 (J-1) y ACUSUM-J-2 (J-2)	76
3.1.	Valores mínimos de ARL para cada cambio τ y el correspondiente λ	84
3.2.	Diseños óptimos de los gráficos de control AEWMA-S ² en zero-state, $ARL_0 = 200$ y $n = 5$. . .	93
3.3.	Diseños óptimos de los gráficos de control AEWMA-S ² en steady-state, $ARL_0 = 200$ y $n = 5$. .	93
3.4.	Valores del ARL con $n = 5$ en zero-state con $ARL_0 = 200$ y $n = 5$	94
3.5.	Valores del ARL en steady-state con $ARL_0 = 200$ y $n = 5$	94
3.6.	Diseños óptimos de los gráficos de control AEWMA-S ²	96
3.7.	Valores del ARL con $n = 5$	96
3.8.	Valores del ARL en zero-state con $ARL_0 = 200$ y $n = 5$. Se consideran: AEWMA1-S ² -1 (1-S ² -1), AEWMA2-S ² -1 (2-S ² -1), AEWMA3-S ² -1 (3-S ² -1), AEWMA4-S ² -1 (4-S ² -1), AEWMA1-S ² -2 (1-S ² -2), AEWMA2-S ² -2 (2-S ² -2), AEWMA3-S ² -2 (3-S ² -2), AEWMA4-S ² -2 (4-S ² -2), Shewhart-S ² (S-1), EWMA-S ² -1 (E-1), EWMA-S ² -2 (E-2), EWMA-S ² -3 (E-3), EWMA-S ² -4 (E-4), EWMA-S ² -CT1 (CT-1), EWMA-S ² -CT2 (CT-2), EWMA-S ² -CT3 (CT-3), EWMA-S ² -CT4 (CT-4), AEWMA-S ² -SH-1 (SH-1) y AEWMA-S ² -SH-2 (SH-2).	97

Índice de figuras

1.1.	Gráfico de control \bar{X}	7
1.2.	Curvas características de operación de un gráfico \bar{X}	10
1.3.	Valores de ARL para distintos valores de n . $ARL_0 = 370$	12
1.4.	Gráfico de control CUSUM.	14
1.5.	Gráfico de control EWMA.	16
1.6.	Gráfico de control S.	33
1.7.	Curvas características de operación de un gráfico S^2	35
1.8.	Valores de ARL del gráfico de control S^2	37
2.1.	(a) Comparación entre los valores del ARL^* (-*-) y $ARL^* + 5\%$ (---). (b) Comportamiento de los λ óptimos (-*-), y un rango de variación definido por λ_1 (- -) y λ_2 (---).	56
2.2.	(a) Comportamiento de F_t en función de x_t . (b) Comportamiento de λ_t en función de x_t , con PS1: $\lambda_{\min} = 0.0564$, $\lambda_{\max} = 0.44$, $a = 1$, $p_0 = 0.3$, y $h = 0.3621$	60
2.3.	(a) Comportamiento de λ_t en función de x_t con $y_{t-1} = 0$ (---) e $y_{t-1} = 1$ (\cdots) para el gráfico AEWMA2 con PS2: $\lambda_{\min} = 0.0564$, $\lambda_{\max} = 0.44$, $a = 1$, $p_0 = 0.3$ y $h = 0.3621$. (b) Comportamiento de λ_t en función de x_t con $y_{t-1} = 0$ (---) e $y_{t-1} = 1$ (\cdots) para el gráfico AEWMA2 con PS3: $\lambda_{\min} = 0.11$, $\lambda_{\max} = 0.3$, $a = 1$, $p_0 = 0.2$ y $h = 0.3621$	62
2.4.	(a) Comportamiento de λ_t en función de x_t con $y_{t-1} = 0$ (---) e $y_{t-1} = 1$ (\cdots) para el gráfico AEWMA3 con PS4: $\lambda_{\min} = 0.0564$, $\lambda_{\max} = 0.44$, $a = 1$, $p_0 = 0$ y $h = 0.3621$. (b) Comportamiento de λ_t en función de x_t con $y_{t-1} = 0$ (---) e $y_{t-1} = 1$ (\cdots) para el gráfico AEWMA3 con PS5: $\lambda_{\min} = 0.11$, $\lambda_{\max} = 0.3$, $a = 1$, $p_0 = 0$ y $h = 0.3621$	63
2.5.	(a) Comportamiento de λ_t en función de y_{t-1} para el gráfico AEWMA4 con diseño Dis-1 con PS6: $\lambda_{\min} = 0.0882$, $\lambda_{\max} = 0.3$, $a = 5$, $p_0 = 0$ y $h = 0.4515$. (b) Comportamiento de λ_t en función de y_{t-1} para el gráfico AEWMA4 con diseño Dis-2 con PS7: $\lambda_{\min} = 0.15$, $\lambda_{\max} = 0.2467$, $a = 5$, $p_0 = 0$ y $h = 0.35$	68

2.6. (a) Comparación del ARL de los primeros cuatro diseños AEWMA propuestos, AEWMA-(1-1, 2-1, 3-1, 4-1). (b) Comparación del ARL de los segundos cuatro diseños AEWMA, AEWMA-(1-2, 2-2, 3-2, 4-2). $ARL_0 = 100$	72
2.7. (a) Comparación del ARL de los primeros cuatro diseños AEWMA propuestos, AEWMA-(1-1, 2-1, 3-1, 4-1) y del EWMA (E-1, E-2). (b) Comparación del ARL de los segundos cuatro diseños AEWMA, AEWMA-(1-2, 2-2, 3-2, 4-2) y del EWMA (E-1, E-2). $ARL_0 = 100$	73
2.8. (a) Comportamiento del ARL de los primeros cuatro diseños AEWMA propuestos, AEWMA-(1-1, 2-1, 3-1, 4-1) y de Shewhart con $n = 1$ (S-1). (b) Comparación del ARL de los segundos cuatro diseños AEWMA, AEWMA-(1-2, 2-2, 3-2, 4-2) y de Shewhart con $n = 1$ (S-1). $ARL_0 = 100$	74
2.9. (a) Comparación del ARL de los primeros cuatro diseños AEWMA propuestos, AEWMA-(1-1, 2-1, 3-1, 4-1) y del AEWMA de CM-1. (b) Comparación del ARL de los segundos cuatro diseños AEWMA, AEWMA-(1-2, 2-2, 3-2, 4-2) y del AEWMA CM-2. $ARL_0 = 100$	75
2.10. (a) Comparación del ARL de los primeros cuatro diseños AEWMA propuestos, AEWMA-(1-1, diseños AEWMA, AEWMA-(1-2, 2-2, 3-2, 4-2). $ARL_0 = 500$	77
2.11. (a) Comparación del ARL de los primeros cuatro diseños AEWMA propuestos, AEWMA-(1-1, 2-1, 3-1, 4-1) y del EWMA (E-3, E-4). (b) Comparación del ARL de los segundos cuatro diseños AEWMA, AEWMA-(1-2, 2-2, 3-2, 4-2) y del EWMA (E-3, E-4). $ARL_0 = 500$	77
2.12. (a) Comparación del ARL de los primeros cuatro diseños AEWMA propuestos, AEWMA-(1-1, 2-1, 3-1, 4-1) y de Shewhart con $n = 1$ (S-2). (b) Comparación del ARL de los segundos cuatro diseños AEWMA, AEWMA-(1-2, 2-2, 3-2, 4-2) y de Shewhart con $n = 1$ (S-2). $ARL_0 = 500$	78
2.13. (a) Comparación del ARL de los primeros cuatro diseños AEWMA propuestos, AEWMA-(1-1, 2-1, 3-1, 4-1) y del AEWMA CM-3. (b) Comparación del ARL de los segundos cuatro diseños AEWMA, AEWMA-(1-2, 2-2, 3-2, 4-2) y del AEWMA CM-4. $ARL_0 = 500$	78
2.14. (a) Comparación del ARL de los primeros cuatro diseños AEWMA propuestos, AEWMA-(1-1, 2-1, 3-1, 4-1) y del ACUSUM J-1. (b) Comparación del ARL de los segundos cuatro diseños AEWMA, AEWMA-(1-2, 2-2, 3-2, 4-2) y del ACUSUM J-2. $ARL_0 = 500$	79

3.1. (a) Comparación entre los ARL^* ($-*-$) y $ARL^* + 10\% \times ARL^*$ ($-$). (b) Comportamiento de λ^* ($-*-$), y un rango de variación definida por λ_1 ($-$) y λ_2 ($-$).	83
3.2. (a) Comportamiento de q_t en función de M_t . (b) Comportamiento de λ_t en función de M_t . Considerando un conjunto específico de parámetros (PS), PS1: $\lambda_{\min}=0.1$, $\lambda_{\max}=0.25$, $a=1$, $p_0=0.9$, y $h=0.3031$	87
3.3. (a) Comportamiento de λ_t en función de M_t con $y_{t-1}=0$ (\cdots) y $y_{t-1}=1$ ($-$) para el gráfico AEWMA2-S ² con PS2: $\lambda_{\min}=0.05$, $\lambda_{\max}=0.25$, $a=1$, $p_0=0.9$, $h=0.1503$. (b) Comportamiento de λ_t en función de M_t con $y_{t-1}=0$ (\cdots) y $y_{t-1}=1$ ($-$) para el gráfico AEWMA2-S ² con PS3: $\lambda_{\min}=0.1$, $\lambda_{\max}=0.35$, $a=1$, $p_0=0.9$ y $h=0.2572$	89
3.4. (a) Comportamiento de λ_t en función de M_t con $y_{t-1}=0$ (\cdots) y $y_{t-1}=1$ ($-$) para el gráfico AEWMA3-S ² con PS4: $\lambda_{\min}=0.1$, $\lambda_{\max}=0.25$, $a=1$, $p_0=0.9$ y $h=0.3023$. (b) Comportamiento de λ_t en función de M_t con $y_{t-1}=0$ (\cdots) y $y_{t-1}=1$ ($-$) para el gráfico AEWMA3-S ² con PS5: $\lambda_{\min}=0.15$, $\lambda_{\max}=0.3$, $a=1$, $p_0=0.9$ y $h=0.3855$	90
3.5. (a) Comportamiento de λ_t en función de y_{t-1} para el gráfico AEWMA4-S ² con diseño Dis-1, con PS6: $\lambda_{\min}=0.1$, $\lambda_{\max}=0.25$, $a=5$, $p_0=0.1$ y $h=0.23912$. (b) Comportamiento de λ_t en función de y_{t-1} para el gráfico AEWMA4-S ² con diseño Dis-2, con PS7: $\lambda_{\min}=0.15$, $\lambda_{\max}=0.35$, $a=5$, $p_0=0.1$ y $h=0.327$	95
3.6. (a) Comparación del ARL de los cuatro primeros diseños AEWMA-S ² , AEWMA-S ² -(1-1, 2-1, 3-1, 4-1). (b) Comparación del ARL de los segundos cuatro diseños AEWMA-S ² , AEWMA-S ² -(1-2, 2-2, 3-2, 4-2). $ARL_0=200$, $n=5$	99
3.7. (a) Comparación del ARL de los cuatro primeros diseños AEWMA-S ² , AEWMA-S ² -(1-1, 2-1, 3-1, 4-1) y del gráfico Shewhart-S ² , $n=5$ (S-1). (b) Comparación del ARL de los segundos cuatro diseños AEWMA-S ² , AEWMA-S ² -(1-2, 2-2, 3-2, 4-2) y del gráfico Shewhart-S ² , $n=5$ (S-1). $ARL_0=200$	100
3.8. (a) Comparación del ARL de los primeros cuatro diseños AEWMA-S ² , AEWMA-S ² -(1-1, 2-1, 3-1, 4-1) y de los diseños EWMA (E-1 y E-2). (b) Comparación del ARL de los segundos cuatro diseños AEWMA-S ² , AEWMA-S ² -(1-2, 2-2, 3-2, 4-2) y de los diseños EWMA (E-3 y E-4). $ARL_0=200$ y $n=5$	100
3.9. (a) Comparación del ARL de los cuatro primeros diseños AEWMA-S ² , AEWMA-S ² -(1-1, 2-1, 3-1, 4-1) y de los diseños EWMA (CT-1 y CT-2). (b) Comparación del ARL de los segundos cuatro diseños AEWMA-S ² , AEWMA-S ² -(1-1, 2-2, 3-2, 4-2) y de los diseños EWMA (CT-3 y CT-4). $ARL_0=200$ y $n=5$	101

- 3.10. (a) Comparación del ARL de los cuatro primeros diseños AEWMA- S^2 , AEWMA- S^2 -(1-1, 2-1, 3-1, 4-1) y el diseño AEWMA- S^2 -SH-1. (b) Comparación del ARL de los segundos cuatro diseños AEWMA- S^2 , AEWMA- S^2 -(1-2, 2-2, 3-2, 4-2) y el diseño AEWMA- S^2 -SH-2. $ARL_0 = 200$ y $n = 5$ 101

Resumen

En el Control Estadístico de Procesos, SPC (del Inglés: *Statistical Process Control*), los gráficos de control estadístico constituyen una herramienta muy importante que en los últimos tiempos se ha venido desarrollando para hacerla más eficiente en la detección de cambios en alguna característica de interés de un determinado proceso. Los primeros gráficos de control fueron introducidos por Shewhart en 1931, los cuales son eficientes en la detección de cambios grandes. Sin embargo, no lo son en la detección de cambios pequeños. Es por esta razón que aparecen los gráficos de control con memoria como EWMA (*Exponentially Weighted Moving Average*-Roberts, 1959) o CUSUM (*Cumulative Sum*-Page, 1954 y 1955b), los cuales pueden ser diseñados para ser óptimos en la detección de un cambio específico. No obstante, si se diseñan para detectar, por ejemplo, un cambio pequeño, éstos pueden ser ineficientes en la detección de cambios moderados o grandes. En la literatura se han propuesto diversas alternativas para superar esta limitación, como el uso de los gráficos de control con parámetros variables o simplemente gráficos de control adaptativos (Capizzi y Masarotto, 2003 y Shu, 2008). En este sentido, el objetivo principal de esta tesis es proponer algunos gráficos de control EWMA adaptativos para monitorizar la media de un proceso, AEWMA y para monitorizar la varianza de un proceso, AEWMA-S². En general, los gráficos adaptativos propuestos se basan en la evaluación de un potencial desajuste que se traduce en un parámetro de suavizado variable en el tiempo. Dichos gráficos son interesantes ya que se pueden ver como una combinación suave entre los gráficos de control Shewhart y EWMA, los cuales pueden ser eficientes para una amplia gama de cambios.

Esta tesis se organiza de la siguiente manera: el Capítulo 1 está conformado por dos partes en las que se presenta el estado del arte de los gráficos de control en estudio. Concretamente, en la primera parte se presentan los gráficos de control para monitorizar la media de un proceso, tales como los gráficos de control \bar{X} así como los gráficos con memoria (CUSUM y EWMA); posteriormente se estudian algunos gráficos CUSUM y EWMA adaptativos de interés. En la segunda parte del capítulo, se presentan los gráficos de control para monitorizar la varianza de un proceso, concretamente, los gráficos de control S y S². También se revisan los gráficos de control con memoria (CUSUM-S² y EWMA-S²) con las diferentes variaciones presentadas en la literatura. Finalmente, se presentan algunos avances, en la literatura, acerca de los gráficos CUSUM-S² y EWMA-S² adaptativos de interés.

En el Capítulo 2 se proponen varias alternativas de gráficos de control EWMA adaptativos (AEWMA) para el seguimiento de la media de un proceso. A este respecto, se sugieren varias medidas del potencial cambio en la media de un proceso basadas en el valor de la última observación y en el valor del estadístico previo. Para cada medida del potencial cambio, se discuten métodos alternativos para traducir dicha medida en un factor o parámetro de suavizado variable en el tiempo. Seguidamente, se proponen procedimientos para el cálculo del ARL basados en

aproximaciones con cadenas de Markov para cada una de las propuestas; dichos procedimientos de cálculo se utilizan en problemas de optimización planteados para encontrar los diseños óptimos de los gráficos propuestos. Finalmente, se presentan algunas comparaciones numéricas del comportamiento de estos gráficos propuestos con las principales alternativas de la literatura.

En el Capítulo 3, de forma análoga al capítulo anterior, se proponen diversas alternativas de gráficos de control EWMA adaptativos (AEWMA-S²) para el seguimiento de la varianza de un proceso. Con este fin, inicialmente, se hace uso de una transformación adecuada que se encuentra en la literatura para obtener un estadístico de monitorización que se distribuye aproximadamente normal y cumple con las condiciones necesarias para ser monitorizado como un estadístico EWMA tradicional. Por lo tanto, la monitorización se realiza sugiriendo ciertas medidas del potencial cambio en el proceso basadas en el valor de la última observación y en el valor del estadístico previo. Para cada medida del potencial cambio, se discuten métodos alternativos para traducir dicha medida en un factor o parámetro de suavizado variable en el tiempo. Posteriormente, se proponen procedimientos para el cálculo del ARL basados en aproximaciones con cadenas de Markov para cada una de las propuestas. Con el fin de encontrar los diseños óptimos de los gráficos propuestos, se plantean problemas de optimización que utilizan los procedimientos de cálculo del ARL propuestos. Finalmente, se presentan algunas comparaciones numéricas del comportamiento de estos gráficos con las principales alternativas de la literatura.

Al final de esta tesis se presenta las conclusiones generales y un resumen de las posibles líneas de investigación futuras que genera el desarrollo de este trabajo.

Capítulo 1

Control de la media y de la variabilidad-Antecedentes

1.1. Introducción

Hoy en día, la efectividad de los gráficos de control ha hecho que su uso sea muy generalizado, constituyendo además un campo de investigación que ha captado la atención de muchos investigadores. En la literatura se puede encontrar una gran variedad de gráficos de control, adaptados a diferentes características de los procesos: univariantes, multivariantes, para procesos continuos, para procesos en etapas, para monitorizar proporciones, etc.

En particular, y a efectos de lo que nos interesa en la presente tesis, existen gráficos adaptados al tamaño del desajuste esperado. En general, los gráficos clásicos de Shewhart (Shewhart, 1931), basados en monitorizar estadísticos de muestras independientes son eficaces para detectar cambios grandes, pero son poco sensibles a cambios pequeños. La razón está en que, al estar basados en muestras pequeñas, la varianza del estadístico que se monitoriza es elevada. Por esa razón, en la literatura se han propuesto gráficos con memoria basados en sumas acumuladas o CUSUM (*Cumulative Sum*) o en medias móviles exponencialmente ponderadas o EWMA (*Exponentially Weighted Moving Average*), los cuales son más eficientes en la detección frente a cambios pequeños al basarse en estadísticos con menor varianza. Estos gráficos CUSUM o EWMA, por el contrario, son poco sensibles a cambios grandes, debido a que el estadístico que emplean, al basarse en sumas acumuladas, mezclan la información previa al desajuste con la información del proceso desajustado. Es por ello que en la literatura aparecen, entre otras, alternativas como los gráficos de control con memoria con diseño adaptativo que tienen en cuenta las propiedades del proceso, y pueden ser eficientes tanto frente a un cambio pequeño como grande. De esta manera bastaría un solo gráfico en lugar de varios, o de uno en el que se prejuzgue el desajuste del proceso.

En este sentido, este capítulo está conformado por dos partes, la primera en la que se presenta

una revisión bibliográfica de los gráficos de control de la media de un proceso y una segunda parte en la que se presenta una revisión de los gráficos de control de la variabilidad de un proceso.

1.2. Gráficos de control de la media

La investigación publicada por Walter Shewhart (Shewhart, 1931) acerca de los fundamentos del Control Estadístico de Procesos (SPC) supuso un cambio de paradigma en el concepto de control de calidad, porque cambió el enfoque de un control basado en la verificación de las especificaciones finales a un control basado en el seguimiento de la variabilidad intrínseca de un proceso. Shewhart propuso gráficos basados en el seguimiento del valor de un estadístico en muestras independientes, por lo general denominadas subgrupos racionales. Estos gráficos son conocidos como gráfico de control Shewhart. Sea X una variable aleatoria que representa una característica de calidad de un producto obtenido del proceso que queremos monitorizar. Denotemos la media y la varianza de X cuando el proceso está bajo control como μ_0 y σ^2 , respectivamente. Sea $(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in})$ un conjunto de realizaciones de X que conforman el i -ésimo subgrupo racional de tamaño n , siendo \bar{x}_i su media muestral. Un gráfico de control Shewhart \bar{X} monitoriza la evolución de la secuencia de las medias muestrales independientes \bar{x}_i con el objetivo de controlar que la media del proceso no ha cambiado. Bajo el supuesto de que \bar{X} es normal, los límites de control del gráfico de control Shewhart \bar{X} son

$$\mu_0 \pm L\sigma/\sqrt{n}. \quad (1.1)$$

Estos límites corresponden a un intervalo de probabilidad de \bar{X} de cobertura $1 - \alpha$, donde α es la probabilidad de una falsa alarma, es decir depende de L . El gráfico da una alarma si una media muestral cae fuera de estos límites. Del mismo modo, hay gráficos de control Shewhart para otros estadísticos, como rangos, desviaciones estándar, varianzas y coeficientes de variación, entre otros.

Es bien sabido que los gráficos de control \bar{X} y, en general, los gráficos de control Shewhart, no son muy sensibles en la detección de cambios pequeños en la media del proceso. Por ejemplo, es fácil ver que si la media desplazada, μ_1 , es tal que $|\mu_1 - \mu_0| < 2\sigma$, la probabilidad de detectar dicho cambio con el gráfico definido en 1.1, para efectos prácticos, es muy pequeña (ver Sección 1.2.1, curvas características de operación). Con el fin de conseguir una detección más eficiente de cambios pequeños, se necesita un estadístico con menor varianza que, para una tasa de falsas alarmas dada, pueda proporcionar límites de control más estrechos. Esto se podría lograr con un mayor tamaño de subgrupo, n . Sin embargo, dado que los gráficos de Shewhart se basan en muestras independientes, un tamaño de subgrupo racional más grande podría llevar a un tiempo medio a la señal, ATS (del inglés *Average Time to Signal*) mayor, o un mayor número promedio de observaciones a la señal, ANOS (del inglés *Average Number Observations to Signal*).

1.2 Gráficos de control de la media

Con el propósito de aumentar la sensibilidad de los gráficos de control Shewhart frente a los cambios más pequeños, la literatura propone algunas modificaciones, tales como el uso de reglas de rachas suplementarias. Las reglas de rachas son un conjunto de condiciones que ayudan a detectar que una secuencia de varios puntos (racha) en un gráfico Shewhart es muy poco probable si el proceso está bajo control, mostrando evidencia de desajuste. Una racha poco probable disparará una alarma, incluso si los puntos están dentro de los límites de control. En consecuencia, el cambio no necesita producir un punto fuera de los límites de control para ser detectado. Se han propuesto reglas de rachas para los gráficos de Shewhart, entre otros, por Page (1955a), Western Electric (1956), Reynolds (1971), Nelson (1984), Champ y Woodall (1987), Davis y Woodall (1988), Davis et al. (1990), Derman y Ross (1997), Klein (2000), Khoo y Ariffin (2006), Acosta-Mejía (2007), Koutras et al. (2007), y Antzoulatos y Rakitzis (2008).

Otra propuesta para mejorar la sensibilidad de los gráficos de control Shewhart frente a cambios pequeños consiste en la introducción de un diseño adaptativo de los parámetros; típicamente, de tamaño de muestra variable, VSS (del inglés *Variable Sample Size*), de intervalos de muestreo variable, VSI (del inglés *Variable Sampling Interval*) o alguna combinación de ambos enfoques. La idea principal de estos enfoques es aumentar el muestreo (el tamaño o la frecuencia) sólo cuando los datos muestran alguna evidencia de un cambio. Básicamente, en un gráfico de VSS, si el punto cae en la región de advertencia, es decir, una región dentro de los límites de control pero muy cercana a éstos, el siguiente tamaño de la muestra debe ser grande para aumentar la sensibilidad del gráfico. Sin embargo, si el punto cae en la región central, el siguiente tamaño de la muestra puede ser pequeño, ya que no habría evidencia de que el proceso esté fuera de control (ver Daudin, 1992; Prabhu et al., 1993, 1994; Costa, 1994; Zimmer et al., 1998; y, más recientemente, Wu, 2011; Zhang y Wang, 2012, y Castagliola et al., 2012). Del mismo modo, en un gráfico de VSI, el tiempo para tomar la muestra siguiente debe ser menor si el punto cae en la región de alerta debido a que el proceso podría necesitar un ajuste rápido. Por el contrario, el tiempo para tomar la muestra siguiente puede ser grande si el punto actual cae en la región central, ya que el riesgo de estar fuera de control es muy bajo (véase Reynolds et al., 1988; Cui y Reynolds, 1988; Runger y Pignatiello, 1991; Costa, 1994, 1997, 1999a, 1999b; Tagaras, 1998; Mahadik, 2013).

Un procedimiento alternativo para reducir la varianza de los estadísticos de monitorización es el gráfico de control con memoria que consiste en utilizar un estadístico con memoria, es decir, un estadístico basado en algún promedio de los datos actuales y pasados, en lugar de un estadístico basado en muestras independientes. Al utilizar un estadístico con memoria, estamos aumentando el tamaño efectivo de la muestra, lo que lleva a una reducción de la variabilidad que facilitaría la detección. Mediante el uso de un gráfico con memoria, no se está aumentando los costes de muestreo. Sin embargo, la fusión de observaciones pasadas y presentes en un mismo estadístico puede tener un efecto negativo. Si la media del proceso cambia, el estadístico de control con

memoria fusionaría los datos correspondientes al proceso fuera de control con los datos anteriores, de cuando el proceso estaba bajo control. Este efecto podría sesgar el valor del estadístico, que enmascararía el cambio. Esto también puede provocar un retraso en la detección. Por lo tanto, si el cambio es grande, puede que no valga la pena utilizar un estadístico de monitoreo con memoria. Por lo tanto, este tipo de gráficos, a los que se les llama también gráficos ponderados en el tiempo, son útiles sólo en el caso de detección de cambios pequeños. La decisión de si se debe utilizar un gráfico de control Shewhart o un gráfico de control con memoria, puede ser interpretada como un caso particular del tradicional equilibrio entre sesgo y varianza (*bias-variance trade-off*). Los gráficos de control con memoria más populares son el CUSUM y EWMA. Estos gráficos con memoria se pueden aplicar para controlar la información de subgrupos racionales; sin embargo, se utilizan con frecuencia para observaciones individuales.

Sea x_t , $t = 1, 2, \dots$, una secuencia de realizaciones independientes de la variable aleatoria X que se distribuye $N(\mu_0, \sigma^2)$ cuando el proceso está bajo control.

Los gráficos de control CUSUM se introdujeron por Page (1954, 1955b) y, luego fueron estudiados, entre otros, por Woodall y Adams (1993). El gráfico CUSUM, que de hecho es un gráfico de dos lados, utiliza dos estadísticos diferentes, C_t^+ y C_t^- , que monitorizan la suma acumulada de las desviaciones positivas y negativas a μ_0 , respectivamente (ver por ejemplo; Page, 1954, 1961; Bissell, 1969; Gan, 1991),

$$C_t^+ = \max [0, C_{t-1}^+ + (X_t - \mu_0) - K] \text{ y } C_t^- = \max [0, C_{t-1}^- - (X_t - \mu_0) - K], \quad (1.2)$$

con $C_0^+ = C_0^- = 0$. Si la desviación acumulada es mayor que K , (en valor absoluto), entonces los estadísticos C_t^+ o C_t^- incrementarán la memoria del gráfico, de lo contrario, se restablecen a 0. Un valor pequeño de K proporcionará una memoria más grande, y, en consecuencia, una menor varianza de los estadísticos. Como resultado, se logra una mejor detección de los cambios más pequeños. Cuando C_t^+ o C_t^- superan un umbral H , el proceso se considera fuera de control. El parámetro H también se define de acuerdo con la desviación típica como $H = h\sigma$. El valor óptimo de h para alcanzar una longitud promedio de rachas, ARL (del inglés Average Run Length) deseado cuando el proceso está bajo control, que se denota como ARL_0 , depende del parámetro de sensibilidad K (Vance, 1986; Hawkins, 1992, 1993), que también usualmente se expresa en función de la desviación típica del proceso como $K = k\sigma$.

El gráfico de control EWMA propone un procedimiento diferente para ponderar la información histórica. Fue introducido por Roberts (1959) y posteriormente se estudió por Robinson y Ho (1978), Hunter (1986), Waldmann (1986), Montgomery, Gardiner y Pizzano (1987), Crowder (1987a y 1989) y Lucas y Saccucci (1990), entre otros. Su estadístico se define como

$$y_t = \lambda x_t + (1 - \lambda) y_{t-1}, \quad (1.3)$$

1.2 Gráficos de control de la media

donde $\lambda \in (0, 1]$ y $y_0 = \mu_0$. Si $\lambda < 1$, el estadístico (1.3) es una media ponderada de las observaciones actuales y pasadas. Cuanto menor sea λ , mayor será el peso asignado a los datos anteriores y, por lo tanto, mayor será el tamaño efectivo de la muestra. Los límites de control eventuales del gráfico EWMA son entonces

$$\mu_0 \pm L\sigma_{y_t} = \mu_0 \pm L\sigma\sqrt{\lambda/(2-\lambda)}, \quad (1.4)$$

donde σ_{y_t} es la desviación típica de y_t y L es un parámetro que depende del ARL_0 deseado. Además, con el objetivo de mejorar su comportamiento, en la literatura se han propuesto los gráficos de control CUSUM y EWMA VSS y VSI que se pueden consultar en Sawalapurkar et al. (1990), Reynolds et al. (1990), Baxley (1995), Keats et al. (1995), Reynolds (1995, 1996), Stoumbos y Reynolds (1996, 1997), Tagaras (1998), Reynolds y Stoumbos (1998), Reynolds y Arnolds (2001) y Arnolds y Reynolds (2001), entre otros.

Alternativamente, en la literatura también se presentan los gráficos adaptativos CUSUM y EWMA que introducen parámetros variables en el tiempo los cuales controlan la memoria del gráfico; es decir el parámetro k en los gráficos CUSUM y λ en el gráfico EWMA. Mediante la adaptación del nivel de memoria, estos gráficos pueden ser sensibles tanto a cambios pequeños como grandes. La intuición detrás de estos gráficos adaptativos es utilizar una medida de la posible presencia de un cambio. En consecuencia, el valor de su parámetro se incrementa cuando se sospecha que el proceso podría estar fuera de control debido a un cambio grande. Por el contrario, si los datos muestran gran evidencia de estar en control o en presencia de un cambio muy pequeño, los parámetros tienden a ser más pequeños, lo que facilita la detección de posibles cambios pequeños. Este tipo de esquema de adaptación es la que nos interesa en esta tesis.

Sparks (2000) desarrollaron el gráfico CUSUM adaptativo (ACUSUM) para detectar cambios desconocidos. El procedimiento se basa en la estimación de la magnitud del potencial cambio, $\hat{\delta}$, usando una media móvil exponencialmente ponderada y haciendo previsiones a un paso por delante. Entonces, el ACUSUM se construye utilizando $k = |\hat{\delta}|/2$ y unos adecuados límites de control. Otras contribuciones de los gráficos ACUSUM se pueden encontrar, entre otros, en Shu y Jiang (2006), Han et al. (2007), Jiang et al. (2008) y Shu et al. (2008).

Capizzi y Masarotto (2003) desarrollaron un gráfico EWMA adaptativo (AEWMA) basado en la ponderación de las observaciones recientes utilizando una función apropiada del error actual $e_t = x_t - y_{t-1}$, donde x_t es la última observación del proceso y y_{t-1} es el valor del estadístico de monitorización previo. El objetivo de este esquema de ponderación es disminuir el llamado problema de la inercia de los gráficos EWMA (Yashchin, 1987), que reduce la eficiencia en la detección. El gráfico de control EWMA resultante introduce un parámetro de suavizado variable en el tiempo λ que depende de la evolución del proceso. En particular, si e_t es pequeño, el valor

de λ tiende a ser pequeño, como en el gráfico EWMA convencional, ya que el proceso parece estar en control. Sin embargo, si e_t es grande el valor de λ tiende a ser grande, ya que el riesgo de estar fuera de control es mayor. Otras investigaciones de interés que estudian los gráficos EWMA adaptativos se puede encontrar en Steiner (1999), Han y Tsung (2004) y Costa y Rahim (2006), entre otros.

A continuación, como parte de los antecedentes de los gráficos de control para monitorizar la media de un proceso, se presenta el gráfico de control \bar{X} ; los gráficos de control con memoria (CUSUM y EWMA); luego se hace una revisión bibliográfica de algunos gráficos CUSUM y EWMA adaptativos de interés.

1.2.1. Gráfico de control \bar{X} con muestras independientes

Consideraciones generales

Las características de calidad de un producto se pueden representar como variables aleatorias que al observarse de forma secuencial forman un proceso estocástico. Si el proceso está bajo control, asumiremos que dicho proceso es estacionario (Bertrand, 1990), con media μ_0 y varianza σ^2 . La monitorización suele basarse en comprobar que μ_0 y σ^2 sean constantes a lo largo del tiempo. En este contexto, los gráficos de control permiten detectar los cambios que puedan experimentar dichos parámetros.

Sea X una variable aleatoria que representa una característica de calidad de un producto. Supongamos que cuando el proceso está bajo control (la aleatoriedad de X procede sólo de causas no asignables), X tiene media μ_0 y varianza σ^2 . Sea $x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in}$ las realizaciones de X que conforman la muestra i -ésima de tamaño n , con \bar{x}_i la media de dicha muestra. En SPC, las muestras que se extraen para realizar el control reciben también el nombre de subgrupos. Asumiremos que se cumplen las condiciones para que \bar{X} sea normal. Un gráfico de control \bar{X} con muestras independientes (en adelante gráfico \bar{X}) monitoriza la evolución de las medias muestrales de cada subgrupo $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots$, con el fin de controlar que la media del proceso se mantiene en μ_0 . Para ello utiliza unos límites equidistantes de μ_0 que representan unos intervalos de probabilidad de \bar{X} de cobertura $1 - \alpha$. La Figura 1.1 presenta un ejemplo de un gráfico \bar{X} , donde CL es la línea central (del inglés *Center Line*) que hace referencia al valor medio μ_0 del estadístico que se monitoriza, y donde LCL y UCL son los límites de control inferior y superior (de los términos en inglés *Lower Control Limit* y *Upper Control Limit*), que se encuentran equidistantes y a un determinado número de desviaciones típicas de μ_0 tal que formen un intervalo de probabilidad $(1 - \alpha)$ centrado en μ_0 . De ahora en adelante se utilizará la notación LCL|UCL para hacer referencia a LCL y UCL. Utilizando la hipótesis de que $\bar{X} \sim N(\mu_0, \sigma^2/n)$, el gráfico \bar{X} tendrá

1.2 Gráficos de control de la media

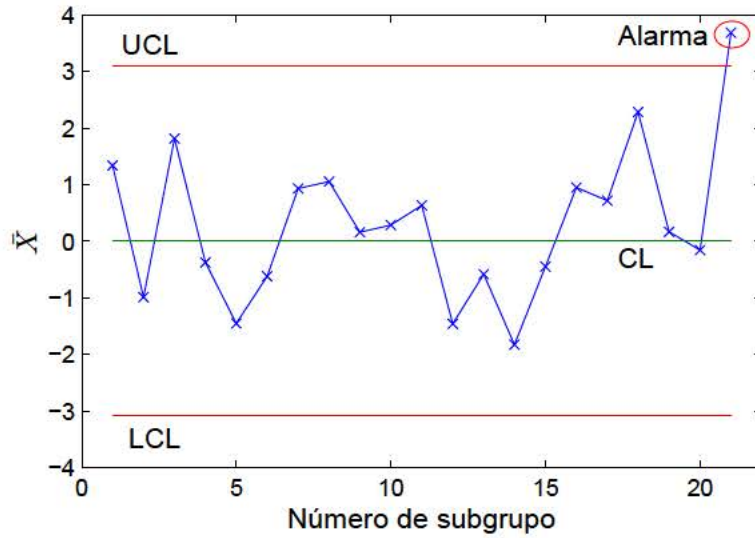


Figura 1.1: Gráfico de control \bar{X} .

los siguientes elementos:

$$CL = \mu_0, LCL|UCL = \mu_0 \mp Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (1.5)$$

Habitualmente se utiliza $\alpha = 0.0027$, por lo que $Z_{\alpha/2} = 3$. Un gráfico de control \bar{X} , para cada subgrupo racional, contrasta las hipótesis

$$H_0 : \mu = \mu_0 \text{ y } H_1 : \mu \neq \mu_0, \quad (1.6)$$

es decir, que la media del proceso está bajo control y tiene un valor μ_0 . Se acepta H_0 si la media muestral \bar{x}_i cae dentro de los límites de control especificados en (1.5); de otra forma se concluye, con nivel de significación α , que el proceso está fuera de control y que la media del proceso tiene un valor diferente de μ_0 . Cuando se hayan graficado un número suficiente de subgrupos es posible detectar situaciones fuera de control analizando rachas de subgrupos que reflejen un comportamiento poco probable. Este tipo de análisis se denomina test de rachas (Western Electric, 1956; Davis et al., 1990; Montgomery, 2012).

En la práctica, la media y desviación típica son generalmente desconocidas por lo que es necesario estimarlas. Para el control de un proceso con estos gráficos, es necesario entonces seguir dos fases. En la primera, llamada Fase I, se utiliza un conjunto inicial de subgrupos en los que se tenga la garantía de que el proceso ha estado bajo control. Con esta muestra de datos se obtienen estimaciones de los parámetros necesarios $\hat{\mu}_0$ y $\hat{\sigma}$ (Montgomery, 2012). Estos valores estimados se utilizan en la llamada Fase II, que es el verdadero periodo de monitorización del proceso,

usualmente en tiempo real.

Diseño y evaluación de los gráficos de control \bar{X} con muestras independientes

Una decisión importante en el diseño de los gráficos de control es la selección del tamaño de la muestra y la frecuencia de muestreo. Si se incrementa el tamaño de la muestra, disminuye la probabilidad del error tipo II denotado por β (probabilidad de que el gráfico se encuentre entre los límites de control cuando en realidad el proceso se ha desajustado), sin variar α , que es el error tipo I. Esto permite detectar cambios menores. Sin embargo, muestras grandes pueden requerir más tiempo de muestreo, por lo que ante una alarma, las pérdidas pueden ser considerables por el mayor tiempo que necesitaremos para detectar el cambio. Por esta razón, en el diseño de los gráficos de control se debe incluir también consideraciones económicas por los costes de muestreo, pérdidas por fabricar productos defectuosos y costes por investigar indicaciones fuera de control que son falsas alarmas.

Así mismo, cuando tenemos un proceso bajo control, se quiere que el gráfico de control indique falsas alarmas con muy poca frecuencia, de acuerdo a la probabilidad α prevista. Por el contrario, en el caso de tener un proceso fuera de control, se quiere que el gráfico dé la alarma a la mayor brevedad posible; es decir, que la probabilidad de que el estadístico caiga dentro de los límites de control sea lo más pequeña posible.

Para evaluar el comportamiento del gráfico según el estado del proceso, se han propuesto diferentes medidas. La más conocida es la ya mencionada longitud promedio de racha, ARL (*Average Run Length*); algunos autores también lo denominan, ANSS (del inglés *Average Number of Samples to Signal*). Denominaremos longitud de racha, RL (del inglés *Run Length*) al número de puntos en el gráfico de control necesarios para dar la alarma tras un desajuste. La RL es una variable aleatoria, por lo que un indicador adecuado sería su valor medio, el ARL (Page, 1954; Ewan y Kemp, 1960). Para tener en cuenta el tamaño de los subgrupos o la frecuencia de muestreo, algunos analistas prefieren utilizar algunas variantes de este concepto, tales como:

- **ATS** (*Average Time to Signal*): es el tiempo medio desde que el proceso se desajusta hasta que el gráfico da la señal de alarma. De esta forma, si un analista propone aumentar el tamaño de la muestra para mejorar la eficiencia del gráfico (disminuir el ARL) podría empeorar su ATS si el ritmo de producción no es muy alto.
- **ANOS** (*Average Number of Observations to Signal*): es el número medio de elementos analizados desde que el proceso se ha desajustado hasta que el gráfico da la señal. Con esta definición, es posible tener en cuenta el coste del muestreo cuando se intenta disminuir el ARL aumentando el tamaño de los subgrupos.

1.2 Gráficos de control de la media

Otra medida habitual para evaluar la efectividad de un gráfico de control es la probabilidad de detectar un desajuste en el subgrupo siguiente tras el desajuste. Esta probabilidad se representa en la llamada curva característica de operación. A continuación se desarrollan estos conceptos.

Curvas características de operación

La efectividad de los gráficos de control \bar{X} y, en general, de los gráficos Shewhart, para detectar cambios en la media del proceso se puede medir por la probabilidad de detectar un desajuste en la primera muestra siguiente al desajuste. Esta probabilidad puede representarse por la curva característica de operación, conocida como curva OC (del Inglés *Operation Characteristic*). En general, dicha curva representa la probabilidad de cometer un error tipo II (β) en una prueba estadística en función del valor del parámetro que se contrasta. Es el valor complementario a la función de potencia. En el presente contexto, representaría la probabilidad de que el punto representado en el gráfico \bar{X} esté dentro de los límites de control en función del tamaño del desajuste en la media del proceso.

Si en la variable X , de media μ_0 y desviación típica σ , la media cambia a otro valor $\mu_1 = \mu_0 + \delta\sigma$, la probabilidad de que \bar{X} esté dentro de los límites del gráfico definido en (1.5) (y, por tanto, no detectemos el desajuste) en la primera muestra siguiente, utilizando $\alpha = 0.0027$ es

$$OC(k) = \Phi(3 - \delta\sqrt{n}) - \Phi(-3 - \delta\sqrt{n}).$$

donde Φ es la distribución normal estándar acumulada.

La Figura 1.2 muestra un conjunto de curvas $OC(\delta)$ para diferentes valores de n en función de δ . En esta figura se ve claramente que con $n = 1$, la probabilidad de que la observación caiga dentro de los límites es muy alta y tiene un decrecimiento muy lento lo que nos sugiere analizar muestras con más de una observación. Para el caso de $n = 5$, con $\delta = 1$ ($+1\sigma$), de las curvas OC se tiene aproximadamente que $\beta = 0.75$, que es aún muy elevado. La probabilidad de detectar el cambio en la segunda muestra se calcula como $\beta(1 - \beta) = 0.19$, y así sucesivamente. La Figura 1.2 ilustra que este tipo de gráficos ($n = 5$) son realmente eficientes si el desajuste es grande, a partir de $\delta = 2$.

Longitud promedio de rachas (ARL)

Otra forma de determinar la efectividad de un gráfico de control, que no es independiente del valor de la curva OC, es a través de la longitud promedio de racha (ARL) o, de forma equivalente, el número medio de muestras (subgrupos) necesarias para dar la alarma tras el desajuste ($ANSS$). Esta medida, como ya se mencionó, se basa en la longitud de la racha (RL) o número de puntos representados en el gráfico de control hasta que da la señal de alarma. Cuando el proceso está

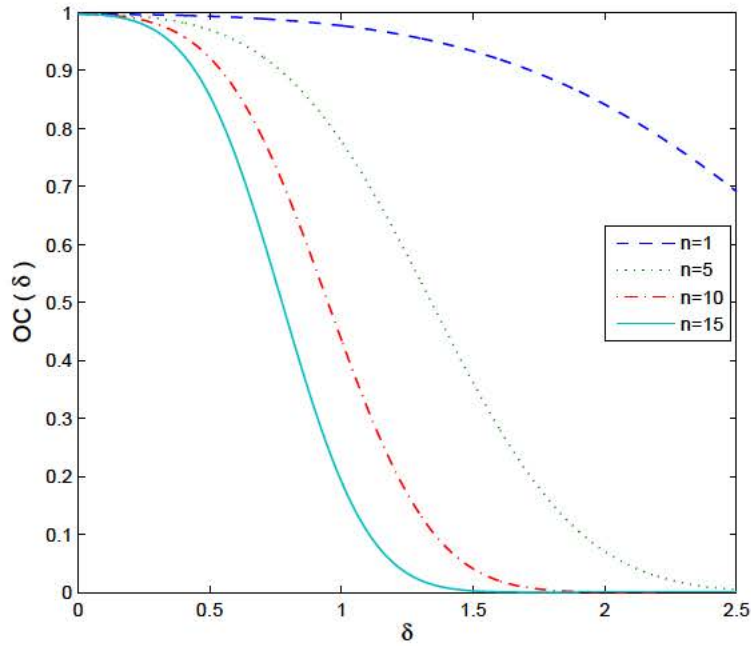


Figura 1.2: Curvas características de operación de un gráfico \bar{X} .

bajo control, la RL cuantifica el número de muestras tomadas desde el instante en que se inicia el control hasta que se obtiene una falsa alarma. Se trata, por tanto, de una variable aleatoria discreta y que en el caso del gráfico \bar{X} estándar basado en subgrupos independientes sigue una distribución geométrica.

Sea p la probabilidad de que un subgrupo caiga fuera de los límites de control tras un desajuste utilizando cierto estadístico basado en muestras independientes, como en el gráfico \bar{X} . Entonces, la probabilidad de que el primer subgrupo tras un desajuste esté entre los límites y de que el segundo dé la alarma es $(1 - p)p$. En general, la probabilidad de que haya que esperar hasta la r -ésima muestra para dar la alarma tras el desajuste es $(1 - p)^{r-1}p$. Entonces la función de probabilidad es

$$P(RL = r) = (1 - p)^{r-1}p, \quad r = 1, 2, 3, \dots \quad (1.7)$$

El valor esperado de esta variable se define como

$$ARL = E[RL] = \sum_{r=1}^{\infty} r(1 - p)^{r-1}p = 1/p, \quad (1.8)$$

y la desviación típica es

$$\sigma_{RL} = \sqrt{1 - p}/p, \quad (1.9)$$

1.2 Gráficos de control de la media

Teniendo en cuenta la relación anterior

$$\sigma_{RL} = \left(\sqrt{1-p} \right) ARL. \quad (1.10)$$

Si el valor de p es muy pequeño, situación deseable cuando el proceso está bajo control, o también cuando se experimenta un desajuste pequeño, se puede asumir que $\sigma_{RL} \approx ARL$. Este resultado es de interés, pues indica que la desviación típica de la RL puede ser aproximadamente del mismo orden de magnitud que su media. La RL es una variable que presenta una fuerte asimetría positiva, de coeficiente de asimetría (CA)

$$CA = (2-p) / \sqrt{1-p}. \quad (1.11)$$

De nuevo, si p es pequeña, se tiene que $CA \approx 2$, que es un valor muy alto. Esto quiere decir que si el desajuste es pequeño (p será bajo), la probabilidad de que necesitemos muchas muestras (más de las que sugiere el ARL) para detectar ese desajuste puede ser alta. La relación del ARL con los riesgos de α y β es directa, puesto que si el proceso está bajo control

$$ARL(\delta = 0) = 1/\alpha \equiv ARL_0. \quad (1.12)$$

Por ejemplo, si $\alpha = 0.0027$ se tiene que $ARL_0 \approx 370$. Si el proceso está fuera de control con un desajuste en la media de $\delta\sigma$

$$ARL(\delta) = 1 / (1 - \beta(\delta)) = 1 / (1 - OC(\delta)).$$

En consecuencia, tiene sentido utilizar el valor del ARL como medida de la efectividad del gráfico de medias y para realizar comparaciones en ciertos contextos. En la Figura 1.3 se presenta el comportamiento del ARL según diferentes valores de n y δ .

Este gráfico ilustra algo que ya se vió en la Figura 1.2, y es que si el desajuste es pequeño, un gráfico basado en muestras independientes necesitará un tamaño de subgrupo muy elevado para poder detectar el desajuste con pocos subgrupos. Esto puede elevar el coste del control y el tiempo necesario para dar la alarma.

Los gráficos de control \bar{X} y, en general, los gráficos Shewhart utilizan sólo información del subgrupo que se representa, sin tomar en cuenta la secuencia completa de puntos. Esto hace que no sean sensibles a cambios pequeños en la media del proceso, como se ha visto en las Figuras 1.2 y 1.3. De lo ya mencionado, se puede concluir que la insensibilidad aparece para desajustes menores a 2σ , siendo ya muy acusada para desajustes menores a 1.5σ .

Cuando se trata de identificar cambios pequeños en la media, se pueden utilizar como alternativa

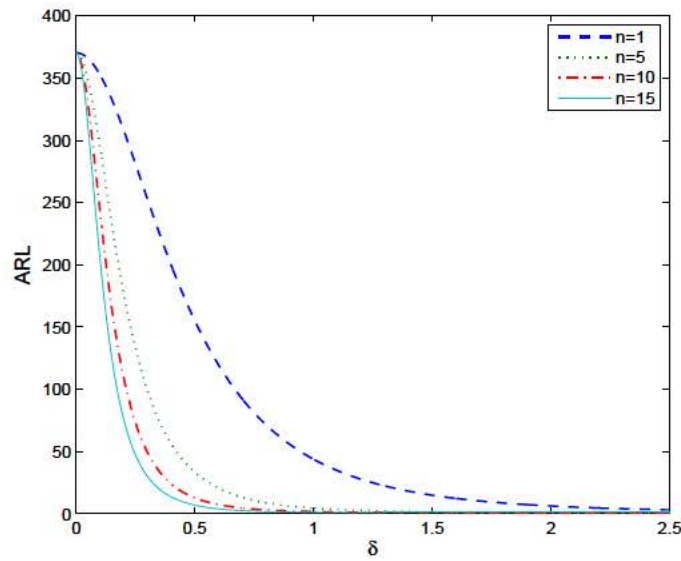


Figura 1.3: Valores de ARL para distintos valores de n . $ARL_0 = 370$.

los gráficos de control con memoria, que tienen en cuenta la trayectoria del estadístico que se utiliza en la monitorización. Los más populares son los denominados gráficos CUSUM y EWMA.

1.2.2. Gráficos de control con memoria

Introducción

La representación gráfica del CUSUM y EWMA no se basa en monitorizar la información de muestras independientes, sino en la acumulación de información, por esta razón se les denominan gráficos con memoria. Esta acumulación facilita la detección de cambios pequeños. Sin embargo, son menos apropiados para detectar cambios grandes en la media, por lo que son complementarios y no sustitutos, de los gráficos de control Shewhart.

Supóngase que se quiere controlar la evolución de una variable X que mide cierta característica de calidad. Las realizaciones sucesivas de esta variable serán: x_1, x_2, x_3, \dots . Supongamos que, idealmente, dicha característica X debe tomar el valor nominal μ . Por tanto, la sucesión de las desviaciones respecto del nivel de referencia μ serán $\Delta_1 = (x_1 - \mu)$, $\Delta_2 = (x_2 - \mu)$, $\Delta_3 = (x_3 - \mu)$, \dots

Si nos remitimos a los gráficos Shewhart, los cuales se basan únicamente en el progreso de Δ_i , un desajuste muy pequeño sería difícil de detectar, al ser todos los Δ_i pequeños. Es más efectivo hacer una representación gráfica basada en acumulación de información, por ejemplo $\Delta_1, \Delta_1 + \Delta_2, \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3, \dots$ etc; de forma que en cada instante se considere información pasada. Un cambio pequeño afectará a todos los valores hasta que su detección sea evidente. Los gráficos,

1.2 Gráficos de control de la media

que se presentan en esta sección, tratan de desarrollar esta idea de distintas formas.

Gráfico de control CUSUM

Los gráficos de control CUSUM fueron introducidos por Page (1954, 1955b) y posteriormente estudiados entre otros, por Woodall y Adams (1993). Se basan en la acumulación de desviaciones de cada observación respecto a un valor objetivo. Sea una variable aleatoria X de media μ_0 y varianza σ^2 , que representa una característica de calidad de un producto, y sea x_i la i -ésima realización de la variable aleatoria X . El gráfico CUSUM tabular, de ahora en adelante simplemente CUSUM, registra las desviaciones acumuladas de la variable X respecto de su media μ_0 mediante dos estadísticos, uno que registra las desviaciones positivas, denotado por C^+ , y otro que registra las desviaciones negativas, denotado por C^- . Estos estadísticos se calculan como en (1.2), donde $C_0^+ = C_0^- = 0$, y el parámetro K , llamado parámetro de referencia, es un parámetro de sensibilidad del gráfico usualmente expresado en función de la desviación típica del proceso como $K = k\sigma$.

Usualmente, K se fija como el valor intermedio entre μ_0 objetivo y el valor μ_1 fuera de control que se desea detectar. Si el cambio expresado en función de las unidades de desviación estándar es $\mu_1 = \mu_0 + \delta\sigma$, entonces K se calcula como sigue (Page, 1961):

$$K = k\sigma = |\mu_1 - \mu_0|/2 = (\delta/2)\sigma \implies k = (\delta/2). \quad (1.13)$$

Se da una señal de fuera de control cuando C_i^+ o C_i^- exceden el intervalo de decisión $[-H, H]$, donde para un determinado valor de k , H es seleccionado para obtener un ARL_0 deseado. Como ya se ha mencionado, el umbral H también se define en función de la desviación típica como $H = h\sigma$.

El CUSUM se obtiene graficando los C_i^+ y C_i^- frente al número de muestra, proporcionando de esta manera, una idea rápida del comportamiento del proceso. Cuando se produzca una señal de alarma, se debe detener el proceso, identificar las causas asignables o especiales, tomar las acciones correctivas e iniciar de nuevo el CUSUM. El momento más probable en el que el proceso se desajustó no es el momento en que los estadísticos superaron los intervalos $[-H, H]$, sino cuando se inició una tendencia en los mismos que acabó superando los límites. En la Figura 1.4 se presenta un ejemplo de gráfico CUSUM.

Existen casos en los que sólo interesa un gráfico CUSUM unilateral, es decir, sólo con C^+ o C^- . Por ejemplo, en un proceso químico en el cual la característica crítica de calidad es la viscosidad del producto y sólo preocupa que la viscosidad aumente, por lo que será necesario detectar el incremento lo más rápido posible.

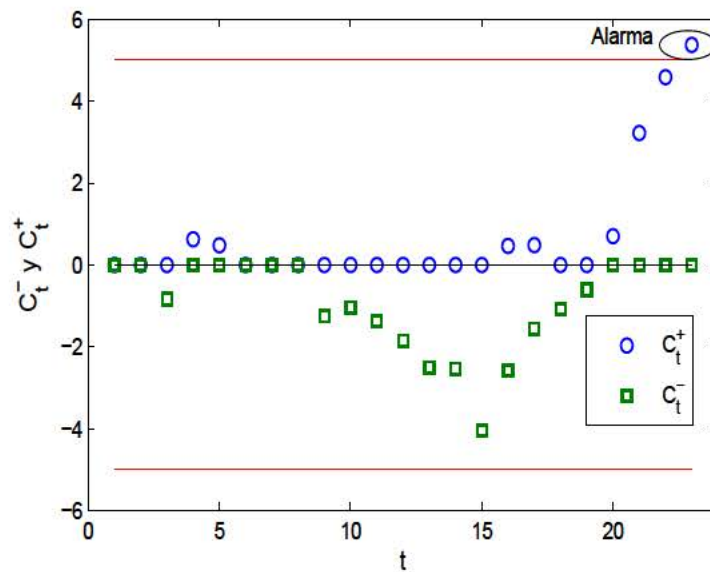


Figura 1.4: Gráfico de control CUSUM.

Diseño y evaluación del CUSUM

El CUSUM tabular se diseña eligiendo los valores de referencia k (o el desajuste esperado δ) y el intervalo de decisión $[-H, H]$. Usualmente estos valores se seleccionan pensando en obtener el mejor comportamiento del ARL. Dadas las propiedades estadísticas del gráfico CUSUM (ver, por ejemplo, el libro de Hawkins y Olwell, 1998), para tener un ARL_0 similar al de los gráficos Shewhart en la detección de un desajuste en la media de $\mu = \mu_0 + 1\sigma$, veamos los siguientes diseños recomendados en la literatura: $h = 4$ y $h = 5$ con $k = 1/2$, donde σ es la desviación estándar de la variable de la muestra usada en el CUSUM. En este sentido, Montgomery (2012), trabajando con esta selección, argumenta que un cambio de 1σ se podría detectar cada 8.38 muestras con $k = 1/2$ y $h = 4$ ($ARL_0 = 168$) o cada 10.40 muestras con $k = 1/2$ y $h = 5$ ($ARL_0 = 465$). Si se escoge un $h = 4.77$, se obtendría un $ARL_0 = 370$ que podría detectar el cambio en un número de muestras intermedio entre 8.38 y 10.40, frente a los gráficos Shewhart para observaciones individuales, que necesitarían de 43.92 muestras en promedio para detectar el mismo cambio (Hawkins, 1993).

Para el cálculo del ARL de este gráfico, existen muchas técnicas. Una de las más usadas es la propuesta por Brook y Evans (1972) basada en cadenas de Markov. Hawkins (1992) ha proporcionado un simple procedimiento de cálculo del ARL basado en unas aproximaciones que requieren de una tabla de constantes, obteniendo un porcentaje de error del 1 a 3 % del valor real del ARL. Woodall y Adams (1993) recomiendan la aproximación del valor del ARL proporcionada por Siegmund (1985) por su simplicidad.

Lucas y Crosier (1982) mencionan dos procedimientos para el cálculo del ARL de los gráficos

1.2 Gráficos de control de la media

de control CUSUM: el enfoque basado en ecuaciones integrales y el enfoque basado en cadenas de Markov, de los que aseguran que el primero calcula valores de ARL con mayor precisión que el segundo; sin embargo, sostienen que es menos versátil. El enfoque basado en cadenas de Markov puede calcular tanto el ARL como la distribución de la RL. Otras aportaciones para el caso del CUSUM bilateral se pueden encontrar en Woodall (1984).

Sensibilidad del gráfico CUSUM

Antes se ha mencionado que los gráficos CUSUM no son muy sensibles frente a cambios grandes en la media de un proceso y que los gráficos Shewhart sí lo son. Por ello, se puede pensar en combinar estos dos gráficos para que trabajen simultáneamente; de esta forma se podrían obtener mejores resultados frente a cualquier tipo de cambio en la media.

Montgomery (2012) comenta que es muy sencillo pasar de gráficos Shewhart a CUSUM; y que el gráfico Shewhart puede ser diseñado para 3.5σ . Un fuera de control en uno o ambos gráficos constituye una señal de acción. Una discusión pionera interesante sobre este tema se puede encontrar en Lucas (1982).

En Montgomery (2012) se presenta una tabla que contiene los valores de ARL de los gráficos CUSUM tabular con $k = 1/2$ y $h = 5$, y los valores de ARL del CUSUM-Shewhart con observaciones individuales y límites a 3.5σ . Se concluye que los valores de ARL incluyendo Shewhart muestran una mejoría en la capacidad del procedimiento para detectar cambios grandes en la media, con sólo una disminución ligera en el valor del ARL_0 . Con esta información Montgomery pone en evidencia que la combinación de ambos gráficos es más eficiente para detectar cambios en la media.

Lucas y Crosier (1982) propusieron un procedimiento, FIR (del inglés *Fast Initial Response*) con el objetivo de mejorar la sensibilidad del CUSUM cuando se inicia el control. Tan pronto aparezca una señal de alarma en el gráfico CUSUM se debe buscar la causa asignable que la originó. Puede ocurrir que dicha causa exista pero no se encuentre o que existan varias causas concurrentes y sólo parte de ellas sean corregidas. En tales circunstancias, sería deseable que el gráfico nos detectara el fuera de control tan rápido como sea posible. En este sentido el FIR asigna a C_0^+ y C_0^- valores iguales a $H/2$. Esto se llama 50 % de valor de cabecera, HS (del inglés *Head Start*, que también se utilizará en el EWMA). Este procedimiento no reduce sensiblemente el ARL_0 ; sin embargo, logra una reducción significativa en los valores del ARL_1 .

Gráfico de control EWMA

El gráfico de control EWMA, que tiene un comportamiento similar al del CUSUM con $n = 1$, fue introducido inicialmente por Roberts (1959) con el estadístico definido en (1.3), donde,

$\lambda \in (0, 1]$ es el parámetro que regula la sensibilidad del gráfico frente a cambios en la media. El valor inicial del estadístico muchas veces toma el valor de la media del proceso, de tal forma que $y_0 = \mu_0$. Si la media es desconocida se estima resultando $\mu_0 = \bar{x}$.

Si las observaciones x_i son realizaciones de la variable $X \sim N(\mu_0, \sigma^2)$, entonces la varianza de y_t denotada como $\sigma_{y_t}^2$ es

$$\sigma_{y_t}^2 = \sigma^2 [\lambda / (2 - \lambda)] [1 - (1 - \lambda)^{2t}], \quad (1.14)$$

que para valores grandes de t es aproximadamente igual a

$$\sigma_{y_t}^2 = \sigma^2 [\lambda / (2 - \lambda)], \quad (1.15)$$

la cual se puede interpretar como que, en el largo plazo, el gráfico EWMA promedia un número equivalente de observaciones $M = (2 - \lambda)/\lambda$, que es mayor si λ es más pequeño.

Los límites de control de y_t respecto al número de muestra t son:

$$CL = \mu_0, LCL|UCL = \mu_0 \mp L\sigma\sqrt{[\lambda / (2 - \lambda)] [1 - (1 - \lambda)^{2t}]}, \quad (1.16)$$

los cuales, para valores grandes de t , se estabilizan en:

$$CL = \mu_0, LCL|UCL = \mu_0 \mp L\sigma\sqrt{[\lambda / (2 - \lambda)]}.$$

En la Figura 1.5 se presenta un ejemplo de gráfico EWMA convencional.

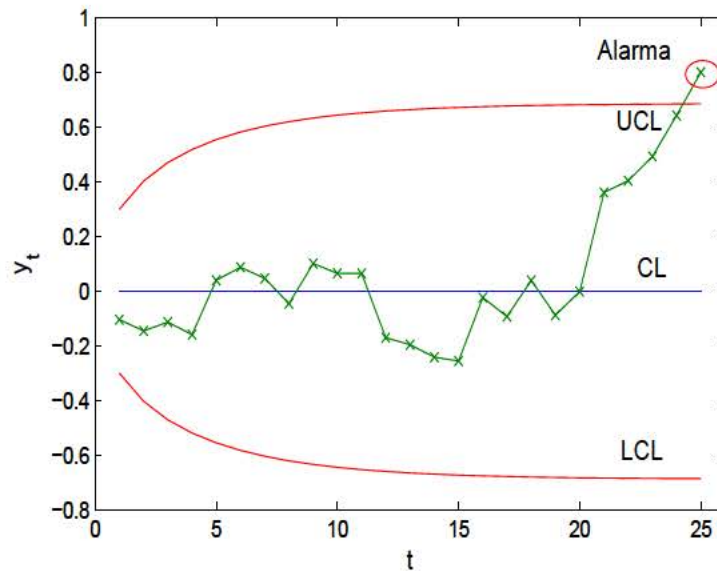


Figura 1.5: Gráfico de control EWMA.

Diseño y evaluación de los gráficos EWMA

Los gráficos EWMA son muy efectivos ante cambios pequeños en la media del proceso. Los parámetros de diseño del gráfico son L y λ . Es posible elegir los valores de esos parámetros con criterios de optimalidad, de tal modo que el rendimiento del ARL del gráfico EWMA sea lo más aproximado al rendimiento del ARL del gráfico CUSUM, para detectar un desajuste δ determinado (Srivastava y Wu, 1993,1997; Wu, 1994). Es importante remarcar que la optimalidad de estos gráficos con memoria depende del valor del desajuste que se ha marcado como objetivo; una vez fijado, los límites de control vienen determinados por el ARL_0 .

Se han realizado muchos estudios de las propiedades del ARL de los gráficos EWMA. Crowder (1987a, 1989) y Lucas y Saccucci (1990) proveen unas tablas de valores del ARL y gráficos para rangos de valores de λ y L . Presentan también el comportamiento del ARL de varios esquemas (para distintos valores de λ y L) de los gráficos EWMA. Por lo tanto, el procedimiento de diseño óptimo consistirá en especificar el ARL_0 deseado y la magnitud del cambio de manera anticipada, para luego seleccionar la combinación de λ y L que minimice el ARL.

Cuanto mayor sea el valor de λ , menor importancia se estará considerando a los valores alejados en el tiempo. Puesto que este tipo de gráficos se usan para detectar cambios pequeños, se recomienda utilizar valores pequeños de λ , generalmente en el rango $0.05 \leq \lambda \leq 0.25$ (valores que funcionan bien en la práctica), siendo $\lambda = 0.05$, $\lambda = 0.1$ y $\lambda = 0.2$ los más utilizados.

Se ha comprobado que para $L = 3$, correspondiente a los usuales límites 3σ , el EWMA trabaja razonablemente bien, en particular con valores grandes de λ , aunque cuando λ es pequeño, es decir $\lambda \leq 0.1$, hay una ventaja reduciendo la amplitud de los límites por usar un valor de L entre 2.6 y 2.8. Con la elección $\lambda = 0.1$ y $L = 2.7$ resulta un $ARL_0 \approx 500$ y un $ARL_1 \approx 10.3$ para detectar cambios de 1σ en la media. Entonces ese diseño es aproximadamente equivalente al CUSUM con $h = 5$ y $k = 1/2$ (Montgomery, 2012).

Hunter (1989) también estudió el gráfico EWMA y sugirió elegir λ de modo que el peso dado a las observaciones actuales y anteriores, coincida lo máximo posible con los pesos dados a estas observaciones en un gráfico Shewhart con las reglas de Western Electric (1956). Esto resultó en un valor recomendado de $\lambda = 0.4$. Si $L = 3.054$, resultaría un valor de $ARL_0 \approx 500$ y un $ARL_1 \approx 14.3$ para detectar cambios de 1σ en la media.

Como el CUSUM, el EWMA se comporta bien frente a cambios pequeños pero no reacciona tan rápido frente a cambios grandes. Sin embargo, el EWMA es frecuentemente superior al CUSUM para cambios grandes, particularmente si $\lambda > 0.1$. (Montgomery, 2012). El gráfico EWMA es frecuentemente usado con medidas individuales ($n = 1$), sin embargo, para $n > 1$ también se usan reemplazando x_i por \bar{x}_i en (1.3) y σ por $\sigma_{\bar{x}_i} = \sigma/\sqrt{n}$ en (1.14) o (1.15).

Como antes se ha mencionado, el diseño óptimo de un gráfico EWMA se basa en seleccionar la combinación de λ y L de tal forma que, dado el ARL_0 deseado y la magnitud del cambio δ (en

unidades de desviación típica) que se quiere detectar en la media del proceso, produzca el mínimo ARL_1 . Bajo estas condiciones, Crowder (1989) recomienda las siguientes etapas para el diseño:

- Etapa I: Elegir el menor ARL_0 ($\delta = 0$) que se considere aceptable. Para la selección del ARL se debe tener en cuenta el coste por una falsa alarma y el tiempo del proceso.
- Etapa II: Decidir la magnitud δ del cambio en la media que se quiere detectar lo más rápido posible.
- Etapa III: Una vez fijado el ARL_0 de la etapa I y la magnitud del cambio de la etapa II, se escogen los valores de λ y L que hacen mínimo el ARL para el cambio especificado en la Etapa II.

Crowder (1987a, 1987b) muestra que el ARL en función del cambio δ , que denotaremos $\mathcal{L}(\delta)$, del gráfico EWMA se puede expresar como solución de la siguiente ecuación

$$\mathcal{L}(\delta) = 1 + \frac{1}{\lambda} \int_{-h}^h \mathcal{L}(x) \phi\left(\frac{x - (1 - \lambda)\delta}{\lambda}\right) dx,$$

siendo δ la magnitud del cambio en la media, ϕ , la función de densidad de la $N(0, 1)$ y $h = L\sigma\sqrt{[\lambda/(2 - \lambda)]}$.

Lucas y Saccucci (1990) evalúan el comportamiento del ARL del gráfico de control EWMA, usando un procedimiento con cadenas de Markov. De esta manera proponen un procedimiento que consiste en dividir el intervalo (entre los límites de control superior e inferior) en $2m + 1$ subintervalos de amplitud 2Δ . El estadístico de control y_i , se dice que está en el estado transitorio j en el momento i si $S_j - \Delta < y_i \leq S_j + \Delta$ para $j = -m, -m + 1, \dots, m$, donde S_j representa el punto medio del j -ésimo intervalo. Se dice que, y_i está en el estado absorbente, a , si cae fuera de los límites de control.

El proceso se supone controlado si y_i está en un estado transitorio y se supone fuera de control cada vez que y_i está en el estado absorbente. La distribución de la RL del EWMA está completamente determinada por su vector de probabilidades inicial y la matriz de probabilidades de transición. Si p_j es la probabilidad de que y inicie en el estado j , entonces el vector de probabilidades inicial puede ser representado por (Lucas y Saccucci, 1990)

$$\mathbf{p}_{ini}^T = (p_{-m}, \dots, p_{-1}, p_0, p_1, \dots, p_m | 0) = (\mathbf{p}^T | 0),$$

donde $\mathbf{p}^T = (p_{-m}, \dots, p_{-1}, p_0, p_1, \dots, p_m)$. Se debe tener en cuenta que p_a es igual a cero ya que y_i se asume que inicia bajo control. En la práctica, por lo general, el vector de probabilidad inicial contendrá un solo elemento igual a uno, lo que representa el estado inicial de partida, o será un

1.2 Gráficos de control de la media

vector de probabilidades de estado estable. La matriz de probabilidad de transición, representada en forma de matriz particionada, está dada por

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{R} & (\mathbf{I}_{2m+1} - \mathbf{R}) \mathbf{1} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix},$$

donde $\mathbf{R}_{(2m+1) \times (2m+1)}$ es la matriz que contiene las probabilidades de ir de un estado transitorio a otro, \mathbf{I}_{2m+1} es la matriz identidad y $\mathbf{1}$ es un vector columna de unos. Por lo tanto p_{jk} representa la probabilidad de que el estadístico pase del estado j al estado k en un solo paso. Para aproximar esta probabilidad, Lucas y Saccucci suponen que el estadístico es igual a S_j cuando está en el estado j . Esto produce

$$\begin{aligned} p_{jk} &= P(S_k | S_j) \\ &\approx P[\lambda^{-1} \{(S_k - \Delta) - (1 - \lambda) S_j\} < X_i \leq \lambda^{-1} \{(S_k + \Delta) - (1 - \lambda) S_j\}], \end{aligned}$$

con $k, j = -m, -m + 1, \dots, m$.

Las filas de la matriz de probabilidad de transición deben sumar 1, de modo que las probabilidades de pasar de un estado en control a uno fuera de control se encuentran por sustracción. Cuando las $X_i \sim N(\mu_x, \sigma_x)$ y son independientes, las probabilidades de transición en control se aproximan por

$$p_{jk} \approx \Phi[(\lambda\sigma_x)^{-1} \{(S_k + \Delta) - (1 - \lambda) S_j - \lambda\mu_x\}] - \Phi[(\lambda\sigma_x)^{-1} \{(S_k - \Delta) - (1 - \lambda) S_j - \lambda\mu_x\}],$$

donde Φ representa la función de distribución normal estándar. La i -ésima matriz de probabilidad de transición \mathbf{P}^i es útil para evaluar la distribución de la RL , ya que contiene las probabilidades de que el estadístico de control pase de un estado a otro en i pasos, esto es

$$\mathbf{P}^i = \begin{pmatrix} \mathbf{R}^i & (\mathbf{I}_{2m+1} - \mathbf{R}^i) \mathbf{1} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix}.$$

La probabilidad $P(RL \leq i)$ puede calcularse mediante

$$P(RL \leq i) = \mathbf{p}^T (\mathbf{I}_{2m+1} - \mathbf{R}^i) \mathbf{1},$$

y por tanto

$$P(RL = i) = \mathbf{p}^T (\mathbf{R}^{i-1} - \mathbf{R}^i) \mathbf{1}.$$

Usando la expresión anterior, el ARL basado en $2m + 1$ estados en control viene dado por

$$ARL(2m + 1) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{p}^T \mathbf{R}^{i-1} \mathbf{1} = \mathbf{p}^T (\mathbf{I}_{2m+1} - \mathbf{R})^{-1} \mathbf{1}.$$

Por lo general, los momentos de orden superior de la distribución de la RL se pueden obtener fácilmente usando una fórmula recursiva dada por Brook y Evans (1972). Cuando $2m + 1$ tiende a infinito, el $ARL(2m + 1)$ se aproxima al ARL del estado continuo de un gráfico de control EWMA.

De forma similar a la que se ha visto en el CUSUM, Lucas y Saccucci (1990) proponen la implantación del procedimiento FIR que consiste en separar el gráfico de control EWMA en dos: un gráfico superior y otro inferior. El primero definido entre la media y su límite superior, y el segundo definido entre la media y su límite inferior. Ambos gráficos empiezan con valores iniciales diferentes.

Sensibilidad del EWMA

Análogamente a la idea de la combinación CUSUM-Shewhart, Montgomery (2012) también sugiere la combinación EWMA-Shewhart como una buena manera de mejorar la sensibilidad del procedimiento de control para cambios grandes sin sacrificar la capacidad para detectar rápidamente cambios pequeños. Esta idea consiste en tomar límites de Shewhart a $\pm 3.25\sigma$ ó $\pm 3.5\sigma$, haciendo el gráfico de control de X o \bar{X} junto con el EWMA y sus límites. Esta combinación termina por ser muy eficiente para los operarios que se especializan en interpretarla.

Lucas y Saccucci (1990) proponen la combinación EWMA-Shewhart que les lleva a modificar la matriz de probabilidad de transición del gráfico EWMA con probabilidades de transición modificadas a un solo paso como siguen

$$p_{jk} = P[\min\{UCL, \max(LCL, x_L)\} < X_i \leq \max\{LCL, \min(UCL, x_U)\}],$$

donde $x_L = \lambda^{-1}\{(S_k - \Delta) - (1 - \lambda)S_j\}$ y $x_U = \lambda^{-1}\{(S_k + \Delta) - (1 - \lambda)S_j\}$ para $j = -m, -m + 1, \dots, m$, donde UCL y LCL son los límites definidos en (1.5).

1.2.3. Gráficos de control adaptativos para la media

En las secciones anteriores se describió la eficiencia de los gráficos con memoria dependiendo de si el desajuste es pequeño, moderado o grande; mostrándose un mejor comportamiento con valores apropiados en sus parámetros, cuando el desajuste en la media es pequeño. Con el objetivo de hacerlos más eficientes tanto a desajustes pequeños como grandes, en la literatura se han

1.2 Gráficos de control de la media

propuesto alternativas como los gráficos con parámetros adaptativos. En la literatura existen procedimientos que consisten, entre otros, en hacer variar λ en el EWMA o k en el CUSUM para un ARL_0 deseado, siempre con el fin de hacerlos más eficientes en detectar cualquier magnitud de cambio en la media.

Lo que nos interesa es que cuando el proceso esté bajo control o con un desajuste muy pequeño, se monitorice con un estadístico que tenga poca varianza, lo que se traducirá en unos límites de control estrechos que permitirán detectar un desajuste pequeño con rapidez. De lo contrario, el cambio pequeño desplazará muy poco la distribución del estadístico dentro del gráfico de control y el ARL_1 será entonces muy elevado. En el caso de Shewhart, la varianza del estadístico se logra reducir tomando un tamaño mayor de subgrupo que tiene la desventaja, como se ha mencionado en la Sección 1.2.1, de ser más costoso y necesitar mayor tiempo de muestreo. En el caso de gráficos EWMA, esta menor varianza se puede conseguir con un estadístico que tenga mucha memoria, lo que hará que el estadístico sea un promedio efectivo de muchos datos. Un promedio tipo EWMA es, por tanto, una alternativa más económica que usar gráficos Shewhart con subgrupos de tamaño grande. Esta mayor memoria necesita de un valor pequeño de λ .

Cuando el proceso está fuera de control por un cambio grande en la media, un gráfico EWMA con λ pequeño tardará mucho en reflejar el cambio, pues su estadístico promediará datos posteriores con datos anteriores al desajuste. El desajuste queda así enmascarado. Por consiguiente, su menor varianza no la puede aprovechar en la detección (como si fuese un gráfico Shewhart) debido a la inercia que tiene el estadístico. El hecho de que en el EWMA se utilice la idea de promediar los datos históricos para conseguir una muestra mayor y así una menor varianza no es, por tanto, gratis, pues esa forma de promediar enmascara los desajustes recientes. Por eso, el gráfico Shewhart va a detectar un cambio grande antes que el EWMA. Sólo cuando el proceso lleva ya un tiempo desajustado, el estadístico del EWMA tendrá información significativa posterior al desajuste, y podrá detectarlo. Por esa razón, cuando se sospeche que hay un desajuste grande, es necesario disminuir el peso del pasado rápidamente, lo que se puede conseguir aumentando el valor de λ . Si $\lambda = 1$, el EWMA se comportaría como Shewhart. Entonces, si pudiésemos usar un λ variable, lo haríamos aumentar en cuanto sospechásemos que hay un desajuste, para que así el estadístico no utilice la información histórica que va a enmascararlo.

Para el caso del CUSUM, como se menciona en la literatura, los diferentes valores de k producen diversos niveles de memoria, es decir, a mayor valor de k menor nivel de memoria, y su comportamiento se parece más al de un gráfico Shewhart, por tanto, hace más eficiente al CUSUM frente a cambios grandes. Mientras que valores bajos de k , hacen que el estadístico aumente su memoria siendo más eficiente frente a cambios pequeños (CUSUM convencional). Se puede decir que el valor de k determina el momento en que los estadísticos son reajustados a cero. En este sentido, de forma análoga al EWMA, se desea obtener un CUSUM que funcione con un k variable,

que tome valores dependiendo del tipo de cambio que se desee detectar.

En lo que sigue se presentan algunos gráficos adaptativos de interés que se han propuesto en la literatura.

Gráficos CUSUM con diseño adaptativo (ACUSUM)

El CUSUM convencional, con el parámetro de referencia $k = 0.5$, se utiliza generalmente para detectar desviaciones en la media del proceso de magnitud desconocida. Sin embargo, los gráficos CUSUM se pueden diseñar indicando un rango de cambios o desajustes esperados en la media, siendo éste, el escenario más usual en la práctica.

Sparks (2000) desarrolló gráficos CUSUM para detectar cambios en un intervalo de actuación. Diseñó procedimientos del CUSUM para ser eficientes en detectar cambios esperados pero desconocidos en un rango determinado. Definió dos enfoques, el primero aplica varios gráficos CUSUM convencionales simultáneamente con diferentes límites de reajuste, es decir, con diferentes valores de k , y en consecuencia produce diversos niveles de memoria (a mayor valor de k menor nivel de memoria, y su comportamiento se parece más al de un gráfico Shewhart), por tanto, es más eficiente que el CUSUM convencional (con $k = 0.5$), ya que funciona de forma eficiente para una amplia gama de cambios. Se da una señal de alarma cuando cualquiera de los estadísticos de los diversos CUSUM exceden sus correspondientes intervalos de decisión $[H_i, -H_i]$. El segundo, es un procedimiento de CUSUM útil en situaciones en las que se pueden hacer previsiones a un paso por delante de los cambios δ . Esta previsión de un solo paso por delante del cambio, denotada por $\hat{\delta}$, se utiliza para adaptar el estadístico del CUSUM a que sea aproximadamente óptimo local frente a la detección de cambios. Sparks (2000) utiliza una media móvil exponencialmente ponderada para pronosticar a un paso por delante. En el primer enfoque se plantea detectar de forma eficiente cambios esperados $\delta_t = E(x_t - \mu) / \sigma$ en el rango $\delta_{\min}^U < \delta_t < \delta_{\max}^U$ cuando $\delta_t > 0$ y $\delta_{\min}^L < \delta_t < \delta_{\max}^L$ cuando $\delta_t < 0$. Determina el número de gráficos CUSUM simultáneos, que lo denota como p , siguiendo las recomendaciones de Sparks (1998): para cambios pequeños ($0.75 \leq \delta \leq 1.25$), entonces $p = 2$, para cambios moderados, ($0.5 \leq \delta \leq 2$), entonces $p = 3$, y para cambios grandes ($0.5 \leq \delta \leq 4$), recomienda $p = 4$. Por otro lado, según lo que se mencionó anteriormente, se puede decir que el valor de k determina el momento en que los estadísticos son reajustados a cero. La selección adecuada de los valores de k conduce a procedimientos de control eficientes frente a una amplia gama de cambios. En Sparks (1998) se pueden ver métodos *ad hoc* para elegir valores de k . Sparks (2000) examinó tres valores de k (0.375, 0.5, 0.75) que producen gráficos CUSUM eficientes frente a cambios en el rango $[0.6\sigma, 1.75\sigma]$; sugiere utilizar esta elección por defecto cuando no hay información sobre las magnitudes de los cambios ni frecuencias de muestreo. Finalmente, los valores de H para cada uno de los CUSUM son calculados por simulación, de tal manera que cada CUSUM quede diseñado para un mismo valor de ARL_0 .

1.2 Gráficos de control de la media

Este procedimiento para cambios cercanos a 1σ , supera al CUSUM con $k = 0.5$, sin embargo, justo para 1σ pierde un poco de eficiencia.

En el segundo enfoque, si δ se puede predecir a un paso adelante, por ejemplo si $\hat{\delta}_t^U > 0$, entonces éste sería el valor utilizado para diseñar de forma óptima el CUSUM unilateral (lado superior), con $k = \hat{\delta}_t^U/2$, resultando el estadístico

$$C_t^U = \max \left(0, C_{t-1}^U + z_t - \hat{\delta}_t^U/2 \right),$$

donde $z_t = (y_t - \mu) / \sigma$. Este estadístico, sin embargo, es inapropiado ya que cambia al variar k , ante esta situación, Sparks (2000) propone una modificación simple del estadístico de control.

Sparks (2000) también extiende esta idea al CUSUM bilateral (lados superior e inferior), aplicando simultáneamente, el estadístico del CUSUM a ambos lados. El valor del límite de control se calcula por simulación, fijando el valor de ARL_0 . Otras aportaciones se pueden encontrar en Shu y Jiang (2006). Jiang et al. (2008) propusieron un gráfico CUSUM adaptativo que supera al propuesto por Sparks (2000), éste se presenta más adelante.

Han et al. (2007) presentaron el gráfico CUSUM con la amplificación de la señal local, LSA (del inglés *Local Signal Amplification*) para mejorar el poder del gráfico CUSUM tradicional en detectar un cambio desconocido en la media dentro de un rango determinado. Además, introdujeron una medida para evaluar la eficiencia del gráfico LSA-CUSUM frente a la detección de cambios en la media en un rango de actuación pre-especificado y presentaron un procedimiento para encontrar un gráfico LSA-CUSUM óptimo para cambios en la media dentro de un rango conocido. Las comparaciones de los resultados de la simulación muestran que el gráfico LSA-CUSUM supera al CUSUM tradicional.

Shu et al. (2008) propusieron un procedimiento de tipo Markov para la estimación de la media en los gráficos CUSUM convencionales que actualiza su valor de referencia de forma adaptativa. Esto generaliza una clase de gráficos de control adaptativos CUSUM markovianos llamados ACUSUM-C con el fin de ofrecer en general un buen comportamiento frente a cambios en la media en un rango determinado. Shu et al. (2008) utilizan el gráfico de un solo lado CUSUM superior para ilustrar la idea básica de los gráficos ACUSUM. Por simplicidad, consideran que $\{X_t\}$ es independiente e idénticamente distribuido a una $N(0, 1)$. En este sentido, esperan que en el proceso $\{X_t\}$, la media experimente un cambio hacia arriba en un tiempo desconocido. Ellos introducen el término Q_t que sustituye al valor de δ que en la práctica es desconocido. Consideran que Q_t puede estar cerca de cero cuando se estima el nivel de la media del proceso, mientras que en la práctica, para conseguir una detección más rápida es mejor utilizar un $\delta_{\min}^+ > 0$. Para centrarse en la detección de cambios en la media mayores que δ_{\min}^+ , utilizan $\delta_{\min}^+/2$ como valor de referencia, siempre y cuando $Q_t < \delta_{\min}^+$. Esto conduce al estadístico CUSUM superior de Sparks

(2000):

$$Z_t^+ = \max \left(0, Z_{t-1}^+ + \left[X_t - \hat{\delta}_t^+ / 2 \right] / h \left(\hat{\delta}_t^+ / 2 \right) \right), \quad \hat{\delta}_t^+ = \max \left(\delta_{\min}^+, Q_t \right). \quad (1.17)$$

donde, el valor inicial Z_0^+ se fija generalmente en cero, y una señal de alarma de un aumento en la media se da cada vez que $Z_t^+ > c$, donde c es una constante que depende del ARL_0 . Del mismo modo, un gráfico ACUSUM inferior lo definen como

$$Z_t^- = \min \left(0, Z_{t-1}^- + \left[X_t - \hat{\delta}_t^- / 2 \right] / h \left(-\hat{\delta}_t^- / 2 \right) \right),$$

donde $\hat{\delta}_t^- = \min \left(\delta_{\max}^-, Q_t \right)$ y $\delta_{\max}^- < 0$ es el máximo desplazamiento hacia abajo de la media para facilitar una detección más rápida. Las señales de alarma, en este caso, se dan cuando $Z_t^- < -c$. Ahora bien, Shu et al. (2008) utilizan (1.17) para estimar la media con un procedimiento de cadenas de Markov, como sigue

$$Q_t = Q_{t-1} + \phi(e_t), \quad (1.18)$$

donde $e_t = X_t - Q_{t-1}$ es el error de predicción y $\phi(\cdot)$ es una función monótona. Como valor inicial se suele emplear $Q_0 = 0$, a menos que se quiera aplicar el FIR de Lucas y Crosier (1982). Este tipo de estimador de la media, conocido como estadístico EWMA-C, fue propuesto por primera vez por Yashchin (1995) para estimar la media actual de un proceso sujeta a cambios bruscos, y fue sugerido por Capizzi y Masarotto (2003) para el control de procesos. Es interesante observar que cuando $e_t \neq 0$, el EWMA-C se puede escribir como

$$Q_t = (1 - \phi(e_t)/e_t) Q_{t-1} + (\phi(e_t)/e_t) X_t,$$

que es una combinación lineal convexa de la nueva observación y la última estimación con el peso ajustado por los errores de predicción.

El estadístico EWMA-C en (1.18) incluye al estadístico EWMA (1.3) como un caso especial cuando $\phi(e) = \lambda e$, es decir, $Q_t = (1 - \lambda) Q_{t-1} + \lambda X_t = Q_{t-1} + \lambda e$, donde λ es constante.

Shu et al. (2008) desarrollaron un modelo de cadenas de Markov de dos dimensiones para analizar el RL del ACUSUM mencionado, presentando un comportamiento favorable respecto a los gráficos CUSUM convencionales. Además, muestran que el gráfico ACUSUM-C es mejor que el gráfico AEWMA (que se verá más adelante) en la detección de cambios pequeños, pero es peor en la detección de cambios grandes. Aseguran que el ACUSUM-C es bastante fácil de implementar en la práctica.

Jiang et al. (2008) extendieron el ACUSUM de Sparks (2000), consiguiendo un gráfico CUSUM basado en EWMA-C que consiste en actualizar de forma adaptativa el valor de referencia δ (magnitud del cambio) basado en una estimación del tipo EWMA y luego asignar a este valor un

1.2 Gráficos de control de la media

peso utilizando un cierto tipo de función de ponderación, sugiriendo una función de ponderación lineal ($w(\delta) = \delta$), motivada por los conceptos de contrastes de razón de verosimilitud, que logra en el estadístico un rendimiento de detección superior. En vista de la pérdida de eficiencia en el seguimiento de los cambios grandes en la media de la estimación EWMA, se propone una estimación EWMA generalizada como alternativa usando el enfoque de Huber (1981). Jiang et al. (2008) suponen que $\{X_t\}$ es una sucesión independiente que se distribuye $N(\mu_t, 1)$, donde $\mu_t = \delta$ cuando $t \geq t_0$, y es cero en otro caso. δ y t_0 representan la magnitud del cambio y el tiempo en que ocurre, generalmente ambos son desconocidos. El objetivo de monitorizar el proceso es detectar el cambio δ en la media lo más rápido posible. Jiang et al. (2008) se centran en el lado superior del gráfico ACUSUM para detectar cambios positivos en la media y estiman la media actual del proceso en dicho gráfico, utilizando el estadístico del EWMA como sigue

$$\hat{\delta}_t = (1 - \lambda) \hat{\delta}_{t-1} + \lambda X_t, \quad (1.19)$$

donde $0 < \lambda \leq 1$. El valor inicial se establece en $\hat{\delta}_0 = 0$. Se sabe que el gráfico EWMA con λ pequeño es más sensible a cambios pequeños en la media y menos sensible a cambios grandes. Para mejorar la eficiencia en la estimación en cambios grandes, Yashchin (1995) sugiere la generalización markoviana del estadístico EWMA que se ha mencionado en (1.18)

$$\hat{\delta}_t = \hat{\delta}_{t-1} + \phi(e_t). \quad (1.20)$$

Para garantizar que (1.20) siga rápidamente a los cambios grandes, Yashchin (1995) propone usar la función score de Huber definida como

$$\phi_\gamma(e) = \begin{cases} e + (1 - \lambda)\gamma, & \text{si } e < -\gamma \\ \lambda e, & \text{si } |e| \leq \gamma \\ e - (1 - \lambda)\gamma, & \text{si } e > \gamma \end{cases}, \quad (1.21)$$

donde $\gamma \geq 0$ es una constante. El estadístico (1.20) con (1.21) da lugar al EWMA-C que incluye al estadístico EWMA como un caso especial cuando $\gamma \rightarrow \infty$. Cuando $\gamma = 0$ o $\lambda = 1$, (1.21) se reduce a $\phi(e) = e$, y el estadístico EWMA-C es esencialmente el estadístico de Shewhart, X_t . Se debe tener en cuenta que el estadístico EWMA-C se comporta de forma similar al estadístico EWMA cuando los errores de predicción son pequeños y similar a un estadístico Shewhart cuando los errores de predicción son grandes.

Los estadísticos del gráfico ACUSUM, siguiendo Sparks (2000), son los siguientes:

$$Z_t^+ = \max\left(0, Z_{t-1}^+ + w\left(\hat{\delta}_t^+\right) \left[X_t - \hat{\delta}_t^+/2\right]\right) \text{ y } Z_t^- = \min\left(0, Z_{t-1}^- - w\left(\hat{\delta}_t^-\right) \left[X_t - \hat{\delta}_t^-/2\right]\right), \quad (1.22)$$

con las mismas consideraciones descritas en Sparks (2000) y Jiang et al. (2008). Téngase en cuenta que el gráfico ACUSUM de Sparks corresponde al estadístico ACUSUM en (1.22) usando la función de ponderación $w(\hat{\delta}_t^+) = 1/h(\hat{\delta}_t^+)$ y el estimador EWMA de la media presentado en (1.19). El gráfico ACUSUM definido en (1.22), usando una función de ponderación lineal $w(\hat{\delta}_t^+) = \hat{\delta}_t^+$ y el estimador EWMA-C de (1.20) son denotados como ACUSUM-C. Jiang et al. (2008) demostraron que sus gráficos ACUSUM propuestos (con EWMA-C) se comportan mejor que los gráficos combinados CUSUM-Shewhart y que los gráficos CUSUM tradicionales. Compiten con los gráficos AEWMA (que se ven más adelante), y pueden superar al CUSUM estándar con el mismo tamaño de cambio para el cual el CUSUM ha sido diseñado de forma óptima. Luo et al. (2009) propusieron los gráficos de control ACUSUM-VSI, como una extensión de los gráficos de Sparks (2000) que incluyen la característica VSI.

Gráficos EWMA con diseño adaptativo (AEWMA)

En el diseño del gráfico EWMA, al igual que en el CUSUM, ha de anticiparse la magnitud del cambio que uno espera encontrar con el fin de optimizar el gráfico a dicho desajuste (Wu, 1994). A mayor desajuste, mayor valor del parámetro λ habría que usar. Por lo tanto, un gráfico EWMA convencional está, en cierta forma, especializado para un pequeño entorno alrededor de dicho desajuste. El objetivo de los EWMA adaptativos es permitir que su diseño admita un mayor rango de desajustes en función de la evolución del proceso. Esta mayor versatilidad se consigue haciendo variar sus parámetros con el tiempo; es decir, el tamaño del subgrupo, el intervalo de muestreo o el factor de ponderación, λ .

Capizzi y Masarotto (2003), en términos generales, desarrollaron un gráfico EWMA adaptativo (AEWMA) que pondera las últimas observaciones del proceso supervisado, utilizando una función adecuada del error actual. El gráfico resultante puede ser visto como una combinación suave de un gráfico Shewhart y un gráfico EWMA, ya que el gráfico AEWMA consiste en hacer variar el valor de λ en función de los datos del proceso. En particular, si la observación actual x_t es cercana al valor del estadístico EWMA previo, y_{t-1} , entonces el valor utilizado para λ debe ser pequeño, por lo que el gráfico en ese momento actúa como un gráfico EWMA; pero si la observación actual no está cerca del valor previo del estadístico EWMA, entonces el valor utilizado para λ debe ser grande, por lo que el gráfico en ese momento actúa como un gráfico Shewhart. Los gráficos AEWMA propuestos por Capizzi y Masarotto (2003) consideran el siguiente estadístico

$$y_t = y_{t-1} + \phi(e_t); \quad y_0 = \mu_0, \quad (1.23)$$

donde $e_t = x_t - y_{t-1}$ y $\phi(e_t)$ es una función de puntuación (*score function*). Se produce una señal de alarma cuando $|y_t - \mu_0| > h$, donde μ_0 denota el valor objetivo de la media del proceso y h

1.2 Gráficos de control de la media

es un umbral que se determina, de tal manera que garantice que el promedio de tiempo deseado entre falsas alarmas sea lo más grande posible. Cuando $x_t \neq y_{t-1}$, (1.23) se puede reescribir de la forma,

$$y_t = (1 - w(e_t)) y_{t-1} + w(e_t) x_t, \quad (1.24)$$

es decir, como un estadístico EWMA con pesos variables ya que $w(e) = \phi(e)/e$. Se pueden obtener gráficos Shewhart y EWMA como casos especiales de (1.23) para $\phi(e) = e$ y $\phi(e) = \lambda e$, respectivamente. Con el fin de combinar las mejores características de los gráficos Shewhart y EWMA, Capizzi y Masarotto (2003) ven razonable utilizar otras funciones de puntuación ϕ , y en particular escoger $\phi(\cdot)$, tal que:

- $\phi(e)$ es monótonamente creciente en e .
- $\phi(e) = -\phi(-e)$.
- $\phi(e) \approx \lambda e$, cuando $|e|$ es pequeño, con $0 < \lambda \leq 1$.
- $\phi(e)/e \approx 1$, cuando el valor de $|e|$ es grande.

Las dos últimas condiciones han sido introducidas para obtener un estadístico de control que se comporte como un gráfico EWMA cuando λ es pequeña y como un gráfico Shewhart cuando λ es grande. Además, se debe tener en cuenta que la última condición soluciona el problema de inercia del gráfico EWMA, ya que conduce al estadístico a que, en el caso más desfavorable, pueda "saltar" hacia el valor observado x_t . Capizzi y Masarotto (2003) presentaron los resultados para las tres funciones de puntuación siguientes:

$$\begin{aligned} \phi_{hu}(e) &= \begin{cases} e + (1 - \lambda)k & \text{si } e < -k \\ \lambda e & \text{si } |e| \leq k \\ e - (1 - \lambda)k & \text{si } e > k \end{cases}, \\ \phi_{bs}(e) &= \begin{cases} e \left(1 - (1 - \lambda) \left(1 - (e/k)^2\right)^2\right) & \text{si } |e| \leq k \\ e & \text{en otro caso} \end{cases}, \\ \phi_{cb}(e) &= \begin{cases} e & \text{si } e \leq -p_1 \\ -\tilde{\phi}_{cb}(-e) & \text{si } -p_1 < e < -p_0 \\ \lambda e & \text{si } |e| \leq p_0 \\ \tilde{\phi}_{cb}(e) & \text{si } p_0 < e < p_1 \\ e & \text{si } e \geq p_1 \end{cases}, \end{aligned}$$

donde $0 < \lambda \leq 1$, $k \geq 0$, y $0 \leq p_0 < p_1$ denotan las constantes apropiadas y $\tilde{\phi}_{cb}(\cdot)$ es un polinomio cúbico que hace a $\phi_{cb}(\cdot)$ y a su primera derivada continuas.

Las dos primeras funciones ϕ se inspiran en la función de Huber (Huber, 1981) y en la función bisquare de Tukey (Beaton y Tukey, 1974), respectivamente. La tercera ha sido sugerida como otra forma sencilla de mezclar las funciones ϕ de los gráficos Shewhart y EWMA. Debido a que $\lim_{e \rightarrow \infty} \phi_{hu}(e)/e = 1$, pero $\phi_{hu}(e) \neq e$ para cada e distinto de cero, los gráficos basados en $\phi_{hu}(e)$ pueden casi (no completamente) ignorar las últimas observaciones del proceso, en contraste con los gráficos basados en $\phi_{bs}(e)$ y $\phi_{cb}(e)$ que descartan por completo la historia previa cuando x_t está demasiado lejos de y_{t-1} . Con el fin de hacer comparaciones, Capizzi y Masarotto (2003) utilizaron gráficos AEWMA basados en:

- $\phi_{hu}(e)$ con valores de $\lambda = 0.1$ y $k = 3$.
- $\phi_{bs}(e)$ con valores de $\lambda = 0.1$ y $k = 9$.
- $\phi_{cb}(e)$ con valores de $\lambda = 0.1$, $p_0 = 1$ y $p_1 = 18$.
- $\phi_{cb}(e)$ con valores de $\lambda = 0.1$, $p_0 = 3$ y $p_1 = 9$.

En cuanto al diseño de los gráficos AEWMA, Capizzi y Masarotto (2003) denotan por θ al parámetro que define a este gráfico, por ejemplo, si se utiliza $\phi_{hu}(e)$, entonces $\theta = (\lambda, h, k)$ y proponen la siguiente estrategia:

- Eligen un ARL_0 y dos valores de cambios (cambio pequeño μ_1 y cambio grande μ_2).
- Para el ARL_0 especificado, encuentran los parámetros θ^* teniendo el mínimo ARL con μ_2 . Esto es, θ^* es la solución del problema:

$$\begin{cases} \min_{\theta} ARL(\mu_2, \theta) \\ \text{sujeto a } ARL(0, \theta) = ARL_0 \end{cases},$$

donde $ARL(\mu, \theta)$ denota el ARL del gráfico con parámetros iguales a θ cuando el cambio es μ .

- Finalmente, se escoge una constante α pequeña y positiva (por ejemplo $\alpha = 0.05$) y se encuentra el θ óptimo como la solución de

$$\begin{cases} \min_{\theta} ARL(\mu_1, \theta) \\ \text{sujeto a } ARL(0, \theta) = ARL_0 \\ \text{y } ARL(\mu_2, \theta) \leq (1 + \alpha) ARL(\mu_2, \theta^*) \end{cases},$$

es decir, encontrar un gráfico con el mínimo ARL en μ_1 entre los gráficos para los cuales el ARL en μ_2 es próximo al óptimo para ese cambio.

1.3 Gráficos de control de la variabilidad

Este enfoque parece producir gráficos AEWMA con un rendimiento razonable para cambios pequeños y grandes. Sin embargo, no es tan útil para diseños de gráficos de control CUSUM o EWMA convencionales.

Capizzi y Masarotto (2003) calcularon el ARL utilizando procedimientos introducidos por Lucas y Saccucci (1990) basados en cadenas de Markov. Finalmente, compararon el gráfico AEWMA con otros gráficos de control (incluyendo combinaciones, por ejemplo Shewhart-EWMA) bajo un mismo ARL_0 fijo para el seguimiento de la media y concluyeron que el gráfico AEWMA es más eficiente frente a cambios grandes y pequeños.

Otro esquema adaptativo alternativo es el llamado gráfico EWMA generalizado, o GEWMA, propuesto por Hang y Tsung (2004). Este gráfico plantea un factor de ponderación diferente en cada instante, $\lambda \equiv \lambda_t$, de manera que se minimice el ARL . La diferencia esencial con un EWMA adaptativo es que el λ_t óptimo calculado para el instante t se aplica a todos los datos, no sólo al último. Es decir, en el GEWMA, se recalcula de nuevo la suma ponderada de las desviaciones desde el inicio. No sigue, por tanto, un esquema recursivo como en el EWMA.

Chou et al. (2008) desarrollaron un diseño económico para el EWMA con intervalos de muestreo variables y muestreo en tiempo fijo (VSIFT). Utilizaron algoritmos genéticos para buscar los valores óptimos de los seis parámetros de prueba (el tamaño de la muestra, el intervalo de muestreo fijo, el número de subintervalos entre dos tiempos de muestreo consecutivos, el coeficiente de los límites de aviso (w , de los límites $\mu_0 \pm w\sigma$), el coeficiente de los límites de control (L , de $\mu_0 \pm L\sigma$), y el peso exponencial constante (λ)) con el objetivo de reducir al mínimo el coste total esperado y además, realizaron un análisis de sensibilidad para investigar el efecto de los parámetros del modelo en la solución del diseño económico. De este estudio demostraron que los gráficos EWMA-VSIFT son económicamente más eficientes que los gráficos EWMA convencionales.

Otras investigaciones de interés que estudian gráficos EWMA adaptativos pueden encontrarse en Steiner (1999) y Chen, Le-Ngoc, Champagne y Xu (2004).

1.3. Gráficos de control de la variabilidad

En la sección anterior se han revisado los gráficos de control más populares para monitorizar la media de un proceso. En la práctica, es incluso más importante monitorizar cambios en la variabilidad que en la media del proceso, ya que un aumento de la variabilidad del proceso provocaría un aumento del número de productos defectuosos mientras que una disminución de la variabilidad conduciría a una mejora de la capacidad del proceso (Acosta- Mejia et al., 1999). Además, no tiene sentido tratar de monitorizar la media del proceso si la variabilidad está descontrolada.

Los gráficos de control Shewhart tales como el de rangos, R , o el de las varianzas muestrales insesgadas, S^2 , se pueden utilizar para monitorizar la variabilidad a través de los subgrupos racionales muestreados del proceso, sin embargo, como sucede en la monitorización de la media, estos procedimientos no son muy sensibles en la detección de cambios pequeños.

Con el fin de aumentar la sensibilidad en la detección de cambios pequeños, en la literatura se pueden consultar algunos procedimientos alternativos que utilizan estadísticos con memoria usualmente llamados gráficos de control con memoria o gráficos de control ponderados en el tiempo, que son útiles sobre todo en la detección de cambios pequeños. Se sabe que los gráficos de control con memoria más populares son los gráficos CUSUM y EWMA, los cuales han sido reconocidos desde hace algún tiempo como herramientas potencialmente poderosas en el control de calidad. Uno de los primeros gráficos de control CUSUM para la monitorización de la variabilidad fue introducido por Page (1963) y luego estudiado y desarrollado, entre otros, por Bagshaw y Johnson (1975), Hawkins (1979), Box y Ramírez (1991), Chang y Gan (1995), Castagliola et al. (2009) y Nazir et al. (2015).

Por otra parte, Wortham y Ringer (1971), Sweet (1986) y Ng y Case (1989) investigaron las propiedades de los gráficos de control EWMA para el seguimiento de la variabilidad del proceso, pero no fueron capaces de introducir estrategias formales de diseño para estos gráficos. Box, Hunter y Hunter (1978), entre otros, presentaron el uso del logaritmo de la varianza muestral ya que su distribución es más aproximadamente normal que la distribución de la varianza de la muestra por sí misma. En este sentido, Crowder y Hamilton (1992) propusieron un gráfico de control EWMA para el seguimiento de la variabilidad basado en dicha transformación logarítmica de la varianza de la muestra, $\log(S^2)$, debido a su simplicidad y eficacia. Castagliola (2005) propuso un gráfico de control EWMA bilateral para la monitorización de la variabilidad usando una transformación logarítmica de tres parámetros (del tipo de transformaciones originales de Johnson, 1949) para mejorar la normalidad.

Como una extensión de la propuesta de Crowder y Hamilton (1992), Shu y Jiang (2008) presentaron un gráfico de control EWMA para el seguimiento de la variabilidad (NEWMA), que trunca las observaciones normalizadas negativas a cero del estadístico EWMA tradicional. Maravelakis y Castagliola (2009) proponen un gráfico de control EWMA modificado para el seguimiento de la desviación estándar cuando se estiman los parámetros. Castagliola et al. (2010) presentó un gráfico EWMA que mejora la versión del 2005. Este gráfico utiliza la transformación de Johnson de cuatro parámetros para lograr la normalidad.

Otras investigaciones interesantes acerca de los gráficos de control CUSUM y EWMA para la variabilidad del proceso se pueden encontrar en Tuprah y Ncube (1987), MacGregor y Harris (1993), Gan (1995), Lowry et al. (1995), Acosta-Mejia (1998), Amin et al. (1999), Chao-Wen y Reynolds (1999), Acosta-Mejía et al. (1999), Huwang et al. (2010), Abbasi (2010), Abbasi y

1.3 Gráficos de control de la variabilidad

Miller (2013) y Haq et al. (2014), entre otros.

Además, con el objetivo de mejorar el rendimiento de las propuestas mencionadas anteriormente, Castagliola et al. (2006 y 2008) propusieron los gráficos de control EWMA-VSI (de intervalo de muestreo variable) y EWMA-VSS (de tamaño de muestra variable) para la monitorización de la variabilidad del proceso. Otras contribuciones se pueden ver en Chengular et al. (1989) y Reynolds y Stoumbos (2001).

De forma análoga al control de la media del proceso, en la literatura se han propuesto gráficos de control CUSUM y EWMA adaptativos para el seguimiento de la variabilidad del proceso. Dichas propuestas se basan en la utilización de parámetros (de referencia de los gráficos) variables en el tiempo que controlan la memoria de los gráficos; es decir k en los gráficos CUSUM y λ en el EWMA. Mediante la adaptación de la memoria, se puede conseguir que los gráficos sean sensibles tanto a cambios pequeños como grandes. La intuición detrás de estos gráficos adaptativos es utilizar una medida de la posible presencia de un cambio. En consecuencia, el valor del parámetro se incrementa cuando se sospecha que el proceso podría estar fuera de control debido a un gran cambio. Por el contrario, si los datos muestran una fuerte evidencia de estar en control o bajo la influencia de un cambio muy pequeño, los parámetros tienden a ser más pequeños, lo que les hace más eficientes en la detección de posibles cambios pequeños. Este tipo de procedimiento de adaptación es el que nos interesa explorar en el presente documento.

Shu et al. (2010) propusieron un gráfico de control CUSUM adaptativo para el seguimiento de los cambios en la variabilidad del proceso (ACUSUM- S^2). Es una extensión de un gráfico de control ACUSUM para el seguimiento de la media del proceso propuesto inicialmente por Sparks (2000). Este gráfico ACUSUM- S^2 ajusta dinámicamente su valor de referencia de acuerdo con una estimación de la varianza actual del proceso y este procedimiento no requiere información precisa acerca de la magnitud del cambio.

En este respecto, Shu (2008), teniendo en cuenta el estadístico de Crowder y Hamilton (1992), propone un gráfico EWMA adaptativo para el seguimiento de la variabilidad de un proceso. Este gráfico se basa en ponderar dinámicamente las últimas observaciones de acuerdo a una función apropiada del error de predicción actual. En realidad, es una extensión de Capizzi y Masarotto (2003) para el seguimiento de la media del proceso y que ha sido desarrollado en la sección anterior.

A continuación, como parte de los antecedentes de los gráficos de control para monitorizar la variabilidad de un proceso, se presenta el gráfico de control Shewhart S^2 ; los gráficos con memoria CUSUM- S^2 y EWMA- S^2 . Luego se expone una revisión bibliográfica de los diseños adaptativos de los gráficos de control con memoria para el seguimiento de la variabilidad.

1.3.1. Gráficos de control S y S^2 con muestras independientes

Gráfico de control S

Sea X una variable aleatoria que representa una característica de calidad de un producto. Supongamos que cuando el proceso está bajo control (la aleatoriedad de X procede sólo de causas no asignables), X se distribuye normal con media μ_0 y varianza σ^2 . Sea $x_{t1}, x_{t2}, \dots, x_{tn}$ las realizaciones de X que conforman el t -ésimo subgrupo racional de tamaño n (considerando n constante). Sea S_t^2 la varianza del t -ésimo subgrupo racional definida por,

$$S_t^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x}_t)^2, \quad (1.25)$$

donde \bar{x}_t es la media del t -ésimo subgrupo racional. S^2 es un estimador insesgado de la varianza poblacional σ^2 . Sea S_t la desviación típica muestral que no es un estimador insesgado de σ , con media $\mu_s = c_4\sigma$, donde c_4 es una constante que depende del tamaño del subgrupo racional n y viene dada por (ver por ejemplo en Montgomery, 2012),

$$c_4 = \left(\frac{2}{n-1} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma[(n-1)/2]}, \quad (1.26)$$

además, la desviación típica de S , σ_s , viene definida por $\sigma\sqrt{(1-c_4^2)}$. Entonces, un gráfico de control S con muestras independientes (en adelante gráfico de control S) monitoriza la evolución de las desviaciones típicas S_1, S_2, \dots de cada subgrupo racional, con el fin de controlar que la media de la desviación típica muestral del proceso se mantenga en μ_s . Para ello utiliza unos límites equidistantes de μ_s que representan el intervalo de S de cobertura $1 - \alpha$, donde habitualmente $\alpha = 0.0027$. La Figura 1.6 presenta un ejemplo del gráfico de control S , donde CL es la línea central que hace referencia al valor medio μ_s , y LCL y UCL son los límites de control inferior y superior respectivamente, que se encuentran equidistantes de la CL y a un determinado número de desviaciones típicas de μ_s tal que formen un intervalo de probabilidad $(1 - \alpha)$ centrado en μ_s . El gráfico de control S tendrá los siguientes elementos,

$$CL = \mu_s, \quad LCL|UCL = \mu_s \mp Z_{\alpha/2}\sigma_s. \quad (1.27)$$

Si se utiliza $\alpha = 0.0027$, entonces $Z_{\alpha/2} = 3$. Un gráfico de control S , para cada subgrupo racional, contrasta las hipótesis,

$$H_0 : \mu = \mu_s \text{ y } H_1 : \mu \neq \mu_s,$$

1.3 Gráficos de control de la variabilidad

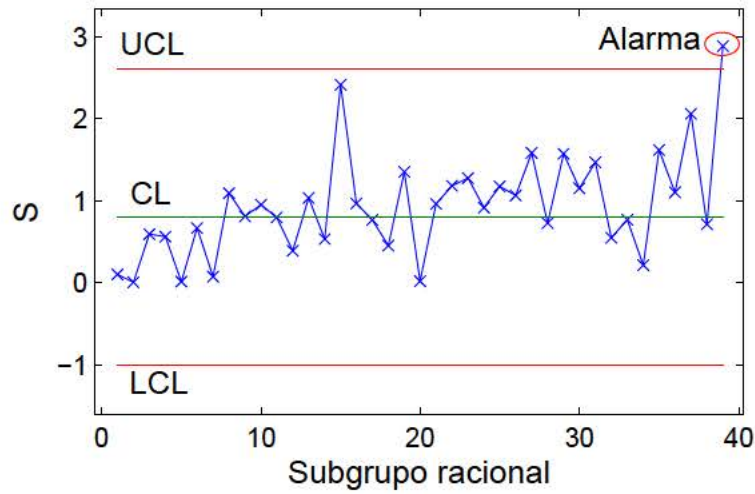


Figura 1.6: Gráfico de control S.

es decir, que la media del proceso está bajo control y tiene un valor μ_s . Se acepta H_0 si la desviación muestral s_i cae dentro de los límites de control definidos en (1.27); de otra forma se concluye, con nivel de significación α , que el proceso puede estar fuera de control y que la media de la desviación típica del proceso tiene un valor diferente de μ_s . Cuando ya se hayan graficado un número suficiente de subgrupos, es posible detectar situaciones de fuera de control analizando rachas de subgrupos que reflejen un comportamiento poco probable.

En la práctica, la media y desviación típica son generalmente desconocidas por lo que es necesario estimarlas. Para el control de un proceso con estos gráficos, es necesario entonces seguir dos fases. En la primera, llamada Fase I, se puede utilizar un conjunto inicial de m subgrupos racionales de los que se tenga la garantía de que el proceso ha estado bajo control. Con esta muestra de datos se estiman los parámetros necesarios, por ejemplo,

$$\bar{S} = \frac{1}{m} \sum_{t=1}^m S_t. \quad (1.28)$$

Luego, dado que S/c_4 es un estimador insesgado de σ , entonces $\hat{\sigma} = \bar{S}/c_4$ y el gráfico de control S viene definido por,

$$\begin{aligned} CL &= \mu_s = \bar{S}, \\ LCL|UCL &= \mu_s \mp Z_{\alpha/2} \sigma_s = \bar{S} \mp Z_{\alpha/2} \frac{\bar{S}}{c_4} \sqrt{(1 - c_4^2)}. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Gráfico de control S^2

En el ámbito de la calidad, los gráficos de control R y S son muy utilizados para monitorear la variabilidad del proceso, incluso el S es más utilizado que el R para tamaños del subgrupo racional moderados a grandes. Otros especialistas de la calidad recomiendan el uso del gráfico de control S^2 (ver Montgomery, 2009, página 259). Siguiendo la misma dinámica de los gráficos S , los gráficos de control S^2 monitorizan la evolución de las varianzas de cada subgrupo racional. Dado que la distribución de S^2 no es simétrica, los límites de control del gráfico S^2 no pueden calcularse tradicionalmente, es decir con términos de un múltiplo de la desviación típica de dicho estadístico. Sin embargo, estos límites de probabilidad se pueden calcular considerando que

$$1 - \alpha = P \left[\frac{\sigma^2}{(n-1)} \chi_{1-\alpha/2, n-1}^2 \leq S^2 \leq \frac{\sigma^2}{(n-1)} \chi_{\alpha/2, n-1}^2 \right],$$

por lo que el gráfico queda definido como,

$$\begin{aligned} UCL &= \frac{\sigma^2}{n-1} \chi_{\alpha/2, n-1}^2, \\ CL &= \sigma^2, \\ LCL &= \frac{\sigma^2}{n-1} \chi_{1-\alpha/2, n-1}^2. \end{aligned} \tag{1.30}$$

Si σ^2 es desconocida, entonces se puede utilizar la varianza promedio de la muestra (\bar{S}^2) obtenida a partir del análisis de los datos preliminares.

Diseño y evaluación de los gráficos de control S y S^2

El diseño y la evaluación de estos gráficos se realizan de forma análoga a los gráficos de Shewhart para el seguimiento de la media (ver la Sección 1.2.1). Se sigue teniendo en cuenta que en un proceso bajo control se quiere que el gráfico indique falsas alarmas con muy poca frecuencia, de acuerdo a la probabilidad α prevista. Por el contrario, en el caso de tener un proceso fuera de control, se quiere que el gráfico dé la alarma a la mayor brevedad posible; es decir, que la probabilidad de que el estadístico caiga dentro de los límites de control sea lo más pequeña posible.

Para evaluar el comportamiento de estos gráficos según el estado del proceso, se utilizan las mismas medidas utilizadas en los gráficos de control para la media, es decir, el RL, ARL o ANSS, SDRL, ATS y ANOS. Aquí también se debe tener en cuenta el coste del muestreo cuando se intenta disminuir el ARL aumentando el tamaño de los subgrupos.

A continuación, se presenta otra forma alternativa de evaluar el comportamiento de estos gráficos utilizando las curvas características de operación.

Curvas características de operación

Se sabe que, en general, la curva OC representa la probabilidad de cometer el error tipo II (β) en una prueba estadística en función del valor del parámetro que se contrasta. En este contexto representaría la probabilidad de que el punto representado en el gráfico S o S^2 esté dentro de los límites de control en función del tamaño del desajuste en σ o σ^2 del proceso. Su determinación se muestra a continuación.

Sea la variable aleatoria normal X que representa una característica de calidad de un proceso que está bajo control con media μ_0 y desviación típica σ , ambas conocidas. Si la desviación típica cambia a otro valor $\sigma_1 = \tau\sigma$, con $\tau \neq 1$, la probabilidad de que S^2 esté dentro de los límites del gráfico definido en (1.30) y, por tanto, no detectemos el desajuste en la primera muestra subsecuente, utilizando $\alpha = 0.0027$, es

$$OC(\tau) = P\left(\frac{\chi_{1-\alpha/2, n-1}^2}{\tau^2} \leq \frac{(n-1)S^2}{\sigma_1^2} \leq \frac{\chi_{\alpha/2, n-1}^2}{\tau^2}\right), \quad (1.31)$$

donde $(n-1)S^2/\sigma_1^2 \sim \chi_{n-1}^2$. Según la expresión (1.31) se obtienen las curvas características de operación de S^2 .

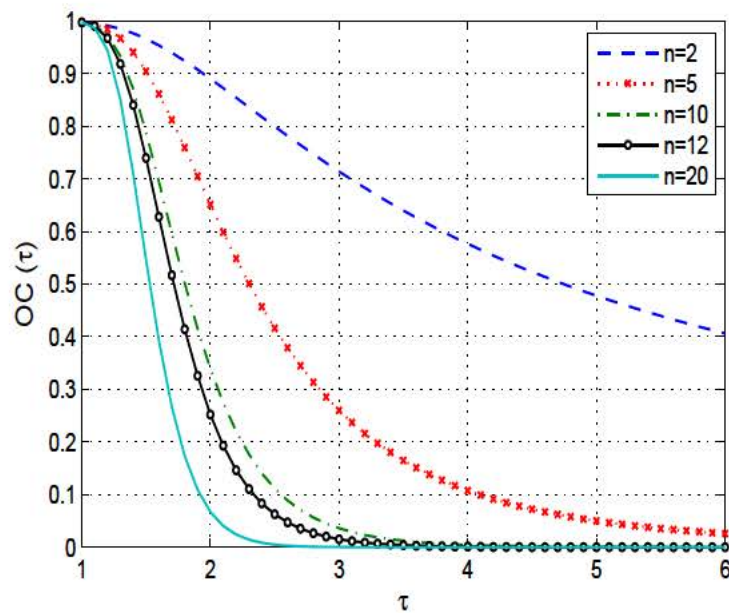


Figura 1.7: Curvas características de operación de un gráfico S^2 .

La Figura 1.7 muestra un conjunto de curvas $OC(\tau)$ para diferentes valores de n en función de τ . En esta figura se ve claramente que con $n = 2$, la probabilidad de que la observación caiga dentro de los límites es muy alta y tiene un decrecimiento muy lento lo que nos sugiere analizar

muestras con n mayor. Para el caso de $n = 5$, con $\tau = 2.5$, se tiene aproximadamente que $\beta = 0.4$, que es aún muy elevado. Para $n = 12$, con $\tau = 2.5$, ya se tiene un $\beta = 0.06$ que indica que el gráfico es eficiente en la detección de desajustes de esa magnitud.

Longitud promedio de rachas (ARL)

Al igual que en el seguimiento de la media, cuando el proceso está bajo control, la RL cuantifica el número de muestras tomadas desde el instante en que se inicia el control hasta que se obtiene una falsa alarma. Se trata, por tanto, de una variable aleatoria discreta y que en el caso del gráfico de varianzas basado en subgrupos independientes sigue una distribución geométrica al igual que en el control de la media del proceso, por lo tanto el ARL se calcula como,

$$ARL = E[RL] = 1/p, \quad (1.32)$$

y en un proceso bajo control,

$$ARL(\tau = 1) = 1/\alpha \equiv ARL_0. \quad (1.33)$$

Por ejemplo, si $\alpha = 0.0027$ se tiene que $ARL_0 \approx 370$. Si el proceso está fuera de control con un desajuste en la varianza $\sigma_1^2 = \tau^2 \sigma^2$ entonces,

$$ARL(\tau) = 1/[1 - \beta(\tau)] = 1/[1 - OC(\tau)].$$

En consecuencia, también tiene sentido utilizar el valor del ARL como medida de la eficiencia del gráfico S^2 y para realizar comparaciones en ciertos contextos. En la Figura 1.8 (en escala logarítmica) se presenta el comportamiento del ARL según diferentes valores de n y τ .

Este gráfico ilustra algo que ya se vió en la Figura 1.7, y es que si el desajuste es pequeño, un gráfico basado en muestras independientes necesitará un tamaño de subgrupo muy elevado para poder detectar el desajuste de la varianza con pocos subgrupos. Esto puede elevar el coste del control y el tiempo necesario para dar la alarma.

Eficiencia de los gráficos de control S y S^2

Estos gráficos, y en general los gráficos Shewhart, utilizan sólo información del subgrupo que se representa, sin tomar en cuenta la secuencia completa de puntos. Esto hace que sean menos sensibles a cambios pequeños en la varianza del proceso, como se ha visto en las Figuras 1.7 y 1.8. Visto el comportamiento de los gráficos, se puede concluir que la insensibilidad con $n = 5$, aparece para desajustes menores a $\tau = 2$, siendo ya muy acusada para desajustes menores a 1.5. Para valores de n a partir de 10, mejoran su eficiencia pero a costa de problemas de muestreo.

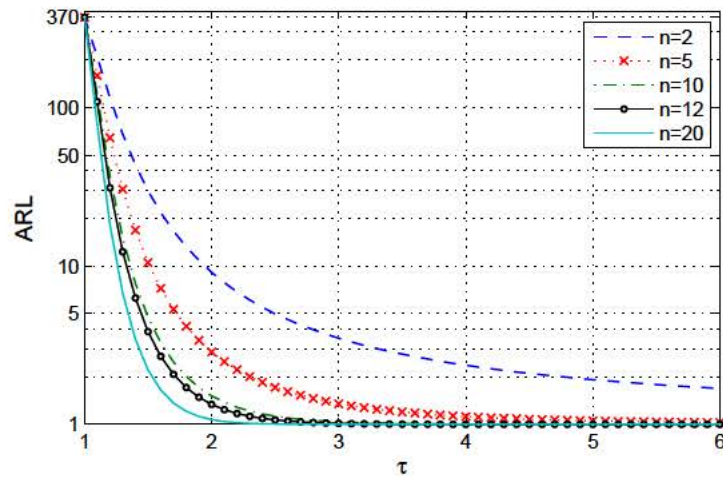


Figura 1.8: Valores de ARL del gráfico de control S^2 .

Cuando se trata de identificar cambios pequeños en la varianza, como alternativa, se pueden utilizar los gráficos de control con memoria S o S^2 , que tienen en cuenta la trayectoria del estadístico que se utiliza en la monitorización, es decir gráficos del tipo CUSUM y EWMA.

1.3.2. Gráficos de control con memoria para la variabilidad

Introducción

Recordemos que la representación gráfica del CUSUM y EWMA no se basa en monitorizar la información de muestras independientes, sino en la acumulación de información, por tal motivo se les conoce como gráficos con memoria. Esta acumulación facilita la detección de cambios pequeños en un determinado estadístico que se quiere controlar. Por contraparte son menos apropiados en la detección de cambios grandes en el estadístico en cuestión, por lo que son complementarios y no sustitutos, de los gráficos de control Shewhart.

En sus inicios, estos gráficos se centraron en el seguimiento de la media de un proceso, sin embargo, en las últimas décadas, ha venido tomando más fuerza el seguimiento de la variabilidad, considerándola igual de importante que el control de la media. En este sentido, introducen los gráficos de control con memoria en la monitorización de la variabilidad del proceso. A continuación, se desarrollan estos gráficos de control.

Gráfico de control CUSUM para la variabilidad

Uno de los primeros gráficos de control CUSUM para la variabilidad fue propuesto por Page (1963) el cual utiliza rangos muestrales junto con líneas de advertencia y reglas de comportamiento para decidir qué cambio de dirección de la trayectoria CUSUM debe exigir acción. En términos

generales, su esquema trata de detectar cambios en la media del rango utilizando el estadístico $S_r = \sum_{i=1}^r (x_i - k)$, donde x_i es el i -ésimo rango de n observaciones. Se toma una acción cuando S_r excede el umbral h . El parámetro de referencia k (generalmente elegido mayor que la media de los rangos) y h se definen para conseguir el ARL_0 deseado. Page en su trabajo demuestra que su propuesta es más eficiente que los gráficos de control S en cuanto al ARL. También presenta diversos esquemas con valores de referencia, intervalos de decisión y valores de ARL, agrupándolos en base a la eficiencia en la detección de cambios específicos en la desviación típica del proceso.

Hawkins (1979), con la premisa que una característica de calidad $X_t \sim N(\mu, \sigma^2)$, precisó que las ideas típicas de los gráficos CUSUM para monitorizar la variabilidad toman en cuenta estadísticos como $|X_{t+1} - \mu|$ o $|X_{t+1} - \mu|^2$ y en caso en que la media del proceso sea desconocida, entonces $|X_{t+1} - \bar{X}_t|$ o $|X_{t+1} - \bar{X}_t|^2$. Dichas propuestas tienen dificultades en las distribuciones de los mencionados estadísticos. Ante esa situación, Hawkins propuso un gráfico de control CUSUM basado en el estadístico, $\sqrt{|X_t/\sigma|}$, el cual se distribuye aproximadamente normal. El inconveniente de esta propuesta es que cuando el proceso se desajusta en su varianza, σ^2 , tanto la media como la varianza del estadístico $\sqrt{|X_t/\sigma|}$ cambian.

Box y Ramírez (1991a,b,c) desarrollaron un procedimiento de diseño óptimo de gráficos CUSUM para monitorizar la varianza. Sus gráficos de control se basan inicialmente en la acumulación de las diferencias cuadradas entre las observaciones y la media del proceso $(X_t - \mu)^2$, siendo μ conocida. En el caso que la media sea desconocida, utilizan una media calculada adecuadamente de datos históricos y realizan los ajustes necesarios en los parámetros del gráfico. Cuando el tamaño del subgrupo es mayor que 1, utilizan la media muestral en lugar de la observación individual, es decir la acumulación de $(\bar{X}_t - \mu)^2$ y hacen los respectivos cambios en los parámetros del gráfico. Box y Ramírez (1991a,b,c) presentaron una amplia evaluación del desempeño de sus gráficos CUSUM.

Chang y Gan (1995) suponen un proceso normal e investigan el desempeño de los gráficos CUSUM unilaterales y bilaterales basados en S^2 y $\log(S^2)$ para el seguimiento de la varianza del proceso. Dado que el $\log(S^2)$ se distribuye aproximadamente normal, facilita la obtención de los valores de los parámetros del gráfico utilizando tablas o nomogramas contruidos para diseñar gráficos CUSUM para el seguimiento de las medias normales. Chang y Gan (1995) precisan que con tamaños de las muestras adecuadamente grandes se obtienen los parámetros del gráfico con mayor precisión.

Por otra parte, discuten el procedimiento de respuesta inicial rápida (FIR) como una mejora de dicho gráfico además de los efectos en el rendimiento del gráfico debido a la no normalidad y a las observaciones en serie correlacionadas. Específicamente, Chang y Gan (1995) suponen que la media del proceso está en control y definen S_1^2, S_2^2, \dots como las varianzas de las muestras

1.3 Gráficos de control de la variabilidad

sucesivas observadas correspondientes a la t -ésima muestra de un proceso. Por lo tanto, los estadísticos del gráfico CUSUM bilateral los definen como,

$$C_t = \max(0, C_{t-1} + y_t - K_C) \text{ y } D_t = \min(0, D_{t-1} + y_t + K_D), \quad (1.34)$$

para $t = 1, 2, \dots$, donde K_C y K_D son constantes conocidas como los parámetros de referencia del gráfico, $y_t = \log(S_t^2)$, $C_0 = u$ y $D_0 = v$ donde $0 \leq u \leq h_C$ y $-h_D \leq v \leq 0$, siendo h_C y h_D los umbrales del lado superior e inferior respectivamente, elegidos para obtener un ARL_0 deseado. Para calcular el ARL del CUSUM del lado superior, Chang y Gan, (1995) utilizan un enfoque similar al de Page (1954) como sigue,

$$H(u) = 1 + H(0) \Pr(\log(S^2) \leq K_C - u) + \int_0^{h_C} H(x) f(x + K_C - u) dx, \quad (1.35)$$

donde $H(u)$ es la función del ARL y $f(\cdot)$ es la función de densidad de probabilidad de $\log(S^2)$. Para encontrar los valores de ARL , sustituyen la ecuación (1.35) por un sistema de ecuaciones lineales usando la cuadratura gaussiana. El mismo razonamiento aplican para el CUSUM de la parte inferior. Adicionalmente, debido a que el $\log(S^2)$ se distribuye aproximadamente normal, aplican el FIR de forma análoga a la presentada por Lucas y Crosier (1982a), es decir con umbrales $h_C/2$ y $-h_D/2$. El cálculo simultáneo del ARL del CUSUM bilateral lo realizan según lo propuesto por Kemp (1961) $1/ARL(0,0) = (1/H(0)) + (1/L(0))$, siempre y cuando $K_C + K_D \geq |h_C - h_D|$ (Van Dobben de Bruyn, 1968). Finalmente, presentan la fórmula general para el cálculo del ARL del CUSUM bilateral según Lucas (1985),

$$ARL(u, v) = \frac{H(u) L(0) + H(0) L(v) - H(0) L(0)}{H(0) L(0)}. \quad (1.36)$$

Dentro de las comparaciones realizadas, muestran que las diferencias en el ARL entre los gráficos de control CUSUM y EWMA basados en $\log(S^2)$ no son grandes. Por lo tanto concluyen que el CUSUM y EWMA son similares entre sí. Para incrementos grandes en la varianza del proceso, el gráfico de control Shewhart tiene los ARL ligeramente más pequeños y el gráfico de control EWMA tiene los ARL más grandes. Todo ello considerando $ARL_0 = 500$ y $n = 5$.

Castagliola et al. (2009) proponen, como una extensión de la propuesta de Chang y Gan (1995), un gráfico de control CUSUM para monitorizar la variabilidad de un proceso, utilizando una transformación logarítmica de tres parámetros. En general, es una aplicación análoga al gráfico de control EWMA (Castagliola, 2005) que se expone en la sección de los gráficos de control EWMA para monitorizar la variabilidad de un proceso. En definitiva, suponen que $X_{t,1}, X_{t,2}, \dots, X_{t,n}$ es la t -ésima muestra de n variables aleatorias independientes y normales, $N(\mu, \sigma_0)$. Además,

definen la varianza de la muestra t , S_t^2 , calculada como,

$$S_t^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (X_{t,j} - \bar{X}_t)^2, \quad (1.37)$$

siendo \bar{X}_t la media muestral del t -ésimo subgrupo racional. Castagliola (2005) sugiere aplicar la transformación de tres parámetros (de la clase de las transformaciones originales de Johnson, 1949) para S_t^2 , es decir,

$$T_t = a + b \ln (S_t^2 + c), \quad (1.38)$$

donde $c > 0$. Luego T_t , como una extensión del EWMA de Castagliola (2005), ingresa en el CUSUM como,

$$Z_t^- = \max (0, Z_{t-1}^- + E(T_t) - T_t - K), \quad (1.39)$$

$$Z_t^+ = \max (0, Z_{t-1}^+ - E(T_t) + T_t - K), \quad (1.40)$$

$$Z_t = \max (Z_t^-, Z_t^+), \quad (1.41)$$

donde K es una constante positiva. El límite de control inferior es cero y el superior está definido por una constante L .

Para el cálculo del ARL , Castagliola et al. (2009) primero suponen que si el proceso ha cambiado su desviación típica de σ_0 a σ_1 , entonces $\tau = (\sigma_1/\sigma_0)$ es una medida que refleja dicho cambio en la variabilidad del proceso. En este sentido, encuentran la combinación de K y L , (K^*, L^*) para un ARL_0 deseado (en $\tau = 1$) que permita obtener el mínimo ARL para un $\tau \neq 1$, es decir,

$$ARL(\tau, K^*, L^*, n) = \min_{K, L} ARL(\tau, K, L, n) \\ s.a. : ARL(1, K^*, L^*, n) = ARL_0,$$

El cálculo del $ARL(\tau, K, L, n)$, lo obtienen siguiendo el procedimiento de cadenas de Markov propuesto por Brook y Evans (1972) y usado por Lucas y Saccucci (1990). Finalmente, Castagliola precisa que el gráfico de control CUSUM propuesto comparte las mismas ventajas que el gráfico de control EWMA de Castagliola (2005), en cuanto a que son gráficos que facilitan el cálculo de sus límites de control y los valores de sus parámetros; además, la transformación de las varianzas muestrales presentan un mejor comportamiento en términos de normalidad y simetría.

Castagliola et al. (2009) han realizado comparaciones, en términos del ARL , con el gráfico EWMA de Castagliola (2005), sugiriendo utilizar esta propuesta de CUSUM si se esperan reducciones en la variación del proceso, de otra manera, aplicar el gráfico de control EWMA

1.3 Gráficos de control de la variabilidad

de Castagliola cuando el tamaño del subgrupo sea pequeño. Cuando el tamaño del subgrupo sea relativamente grande, $n > 10$, sugieren el EWMA por facilidad de uso ante la detección de disminución o incremento de la variabilidad del proceso. Otras contribuciones del gráfico CUSUM para la variabilidad se pueden encontrar en Johnson y Leone (1962), Bagshaw y Johnson (1975) y Nazir et al. (2015), entre otros.

Gráfico de control EWMA para la variabilidad

Durante la última década, el uso de los gráficos de control EWMA como herramienta de supervisión de un proceso se ha vuelto más y más popular en el campo del SPC. En sus inicios, los gráficos de control EWMA se centraban en la monitorización de la media de un proceso, sin embargo, con el paso de los años, estos gráficos se han ido introduciendo en el control de la variabilidad que también tiene un gran impacto en la calidad de un producto. En este sentido Wortham y Ringer (1971), Sweet (1986), y Ng y Case (1989) investigaron las propiedades del EWMA para controlar la variabilidad del proceso sin terminar de introducir estrategias concretas para el problema. Box, Hunter y Hunter (1978), entre otros, introducen el uso del logaritmo de las varianzas de las muestras por su distribución más aproximadamente normal que la distribución de las varianzas muestrales. Bajo esta idea, Crowder y Hamilton (1992) proponen un gráfico de control EWMA basado en la transformación logarítmica de la varianza muestral, utilizando el siguiente estadístico,

$$y_t = \max \{ \lambda x_t + (1 - \lambda) y_{t-1}, \ln \sigma_0^2 \}, \quad (1.42)$$

donde, $y_0 = \ln(\sigma_0^2)$, $x_t = \ln(s_t^2)$, s_t^2 es la varianza muestral del t -ésimo subgrupo racional de tamaño n y λ es el parámetro de referencia del EWMA que toma valor entre cero y uno. En el desarrollo de (1.42) consideran $\sigma_0^2 = 1$. También asumen que $(n - 1) s_t^2 / \sigma^2 \stackrel{iid}{\sim} \chi_{n-1}^2$ o de otra manera $s_t^2 \stackrel{iid}{\sim} \Gamma((n - 1) / 2, 2\sigma^2 / (n - 1))$, donde σ^2 es la varianza del proceso. Demuestran que la varianza de $\ln(s_t^2)$ es independiente de σ^2 y sólo depende del tamaño de la muestra n , además demuestran que un incremento en el parámetro de escala de la distribución gamma (un aumento en σ^2) corresponde a un incremento en el parámetro de localización de la distribución log-gamma correspondiente. Es decir, un aumento en la desviación estándar del proceso en cuestión debe causar un aumento en la media de los EWMA representados.

Crowder y Hamilton, al definir su estadístico EWMA como $\ln \sigma_0^2$ si $\lambda x_t + (1 - \lambda) y_{t-1}$ cae por debajo de $\ln \sigma_0^2$, estaban introduciendo un EWMA unilateral (caso especial del gráfico de control generalizado introducido por Champ, Woodall y Mohsen, 1991), controlando los incrementos en la variabilidad, sin embargo comentaron que se puede proponer gráficos EWMA bilaterales con límites de control superior e inferior para controlar tanto aumentos como disminuciones en la variabilidad.

Para el cálculo del ARL, Crowder y Hamilton adaptan el procedimiento de Crowder (1987) que calcula el ARL de un EWMA bilateral, a su EWMA unilateral. Para ello, demuestran que si $ARL(u)$ es el ARL dado que el estadístico EWMA inicial $y_0 = u$, entonces

$$ARL(u) = 1 + ARL(0) F\left(\frac{-(1-\lambda)u}{\lambda}\right) + \frac{1}{\lambda} \int_0^{UCL} ARL(x) f\left(\frac{x - (1-\lambda)u}{\lambda}\right) dx, \quad (1.43)$$

donde las funciones $F(\cdot)$ y $f(\cdot)$ son, respectivamente, las funciones de distribución y de probabilidad de la distribución log-gamma, con los parámetros definidos arriba. Además UCL es el límite de control superior expresado como $UCL = L\sigma_y$, donde σ_y es la varianza del estadístico EWMA que bajo la suposición de independencia, demostraron que,

$$\sigma_y^2 = \left(\frac{\lambda}{2-\lambda}\right) \left(\frac{2}{n-1} + \frac{2}{(n-1)^2} + \frac{4}{3(n-1)^3} - \frac{16}{15(n-1)^5}\right), \quad (1.44)$$

donde los valores de λ y L se definen en base a la medida del desajuste y al ARL_0 deseado. Finalmente, Crowder y Hamilton (1992) proporcionan estrategias óptimas de diseño y muestran que su propuesta de gráfico de control EWMA y el CUSUM basado en los rangos, para un tamaño de la muestra $n = 5$, tienen un comportamiento similar. Además, muestran que el esquema propuesto EWMA es superior al habitual gráfico de rangos o S^2 en la detección de aumentos en la desviación estándar de un proceso normal.

Como una extensión de la idea de Crowder y Hamilton (1992), Castagliola (2005) propone un gráfico de control EWMA bilateral que utiliza una transformación logarítmica de tres parámetros y que monitoriza la varianza de un proceso. La propuesta de Castagliola (2005) consiste en aplicar a la varianza muestral insesgada S_t^2 definida en (1.37), la misma transformación de tres parámetros, que resulta en T_t , como en (1.38), que luego ingresa en el EWMA

$$Z_t = (1-\lambda) Z_{t-1} + \lambda T_t, \quad (1.45)$$

donde $0 < \lambda \leq 1$ es el parámetro de referencia del gráfico EWMA. Castagliola precisa que la transformación (1.38), con los valores de los parámetros a , b y c adecuados, se distribuye más aproximadamente normal que la transformación de Crowder y Hamilton (1992). Castagliola demuestra que el valor de Z_0 debe ser un valor muy cercano a 0 que sólo depende de n (no de σ_0). Si, para los correspondientes parámetros a , b y c , el valor de la media y de la desviación típica de T_t , $E(T_t)$ y $\sigma(T_t)$, son conocidos, entonces los límites de control del EWMA propuesto vienen dados por,

$$UCL|LCL = E(T_t) \pm L \sqrt{\left(\frac{\lambda}{2-\lambda}\right) \sigma(T_t)}, \quad (1.46)$$

1.3 Gráficos de control de la variabilidad

donde L es una constante positiva que toma valor de tal manera que se obtenga un ARL_0 deseado. Hay que puntualizar que los mencionados límites de control son constantes, con expresiones simplificadas, que pueden hacer perder eficiencia al inicio del control. Castagliola (2005) demuestra que con independencia del valor de n y σ_0 , el valor de la media $E(T_t)$ es muy próxima a cero, por lo que para efectos prácticos, se pueden utilizar los límites,

$$UCL|LCL = \pm L \sqrt{\left(\frac{\lambda}{2-\lambda}\right)} \sigma(T_t). \quad (1.47)$$

El uso de la transformación (1.38) hace que los límites de control del gráfico propuesto EWMA- S^2 sean simétricos. Como un razonamiento intuitivo, Castagliola precisa que una disminución o un aumento de la varianza del proceso debe ser procesado de la misma manera en ambos lados superior e inferior del gráfico, es decir, se puede utilizar el EWMA unilateral sin problema alguno. En cuanto al cálculo de los valores de a , b y c , demuestra que los tres son funciones de n , así como del valor de Z_0 . También deriva la distribución $f_{T_t}(t|n)$ de T_t que es sólo dependiente de n , propiedad que, utilizando cuadratura numérica para distintos valores de n , permite el cálculo de los valores de $E(T_t)$ y $\sigma(T_t)$, independientemente del valor de σ_0 .

Para el cálculo del ARL , primero suponen que si el proceso ha cambiado su desviación típica de σ_0 a σ_1 , entonces $\tau = (\sigma_1/\sigma_0)$ es la medida que refleja dicho cambio en la variabilidad del proceso. Ahora bien, encuentran la combinación de λ y L , (λ^*, L^*) para un ARL_0 deseado (en $\tau = 1$) que permita obtener el mínimo ARL para un $\tau \neq 1$, es decir,

$$ARL(\tau, \lambda^*, L^*, n, t) = \min_{\lambda, L} ARL(\tau, \lambda, L, n, t) \\ s.a. : ARL(1, \lambda^*, L^*, n, t) = ARL_0.$$

El cálculo del $ARL(\tau, \lambda, L, n, t)$, se obtiene resolviendo una ecuación integral de Fredholm de segundo tipo que puede ser aproximada numericamente. Finalmente, Castagliola propone una estrategia de diseño óptimo basado en la ARL y realiza comparaciones con otros procedimientos. Demuestra que el gráfico propuesto EWMA- S^2 , en términos de ARL , da mejores resultados que el enfoque CUSUM de Crowder y Hamilton (1992). También comenta que para un valor $\tau = (\sigma_1/\sigma_0)$ muy alto, el gráfico EWMA- S^2 propuesto es menos eficiente que el gráfico de control Shewhart S típico.

Shu y Jiang (2008) presentan un gráfico de control EWMA para monitorizar la variabilidad de un proceso, al que le llaman NEWMA y que se basa en truncar las observaciones normalizadas negativas a cero en el estadístico EWMA tradicional. Es decir, truncando el término $\ln(S^2/\sigma_0^2)$ al objetivo siempre que su valor sea menor que el objetivo. Shu y Jiang señalan que la media de $\ln(S^2/\sigma_0^2)$ es en realidad negativa cuando el proceso está en control y todavía puede ser negativa

si la varianza del proceso aumenta ligeramente; y en el caso que el proceso esté fuera de control, el valor negativo de $\ln(S^2/\sigma_0^2)$ puede dar lugar a la reposición frecuente del estadístico EWMA. Por otro lado, cuando sólo la parte positiva de $\ln(S^2/\sigma_0^2)$ se acumula en el estadístico EWMA, se espera que contribuya a la acumulación en cada iteración, concluyendo que el truncamiento puede ayudar en la rapidez de la detección de un aumento en la varianza del proceso, especialmente cuando el cambio es pequeño. También precisan que el rendimiento del gráfico no sólo depende de la magnitud de un cambio sino también de la varianza del cambio, es por eso que consideran el análisis de la relación señal-ruido del cambio. A mayor señal al ruido, mayor es la eficiencia en la detección del cambio.

Si analizamos en detalle la propuesta de Shu y Jiang (2008), ellos asumen un proceso con observaciones independientes que se distribuyen $N(\mu_t, \sigma_t^2)$ (sin pérdida de generalidad consideran $\mu_t = 0$) y quieren detectar cambios en la varianza del proceso de $\sigma_t^2 = \sigma_0^2$ en $t < t^*$, a $\sigma_t^2 > \sigma_0^2$ en $t \geq t^*$. Además, denotan la proporción entre la desviación típica y la desviación nominal del proceso como $\tau_t = (\sigma_t/\sigma_0)$ y las varianzas muestrales $S_t^2 = (1/(n-1)) \sum_{i=1}^n (X_{t,i} - \bar{X}_t)^2$, donde $X_{t,i}$ es la i -ésima observación del subgrupo t y \bar{X}_t la media del t -ésimo subgrupo racional de tamaño n .

Se sabe que S_t^2/σ_0^2 sigue una distribución Gamma con parámetro de forma $\alpha = (n-1)/2$ y de escala $\beta = 2\tau_t^2/(n-1)$. Sea $Y_t = \ln(S_t^2/\sigma_0^2)$ el estadístico de Crowder y Hamilton (1992) que se distribuye aproximadamente normal con media y varianza aproximadas dadas por,

$$\mu_Y = \ln(\tau_t^2) - \frac{1}{n-1} - \frac{1}{3(n-1)^2} + \frac{2}{15(n-1)^4}, \quad (1.48)$$

$$\sigma_Y^2 = \frac{2}{n-1} + \frac{2}{(n-1)^2} + \frac{4}{3(n-1)^3} - \frac{16}{15(n-1)^5}, \quad (1.49)$$

donde se puede observar que σ_Y^2 sólo depende de n , y un cambio en σ_t^2 sólo se verá reflejado en la media μ_Y . En un proceso bajo control ($\sigma_t^2 = \sigma_0^2$), se puede ver en (1.48) que $\mu_{Y/\sigma_t=\sigma_0}$ es negativa. Shu y Jiang obtienen el siguiente estadístico normalizado,

$$Z_t = \frac{Y_t - \mu_{Y/\sigma_t=\sigma_0}}{\sigma_Y}, \quad (1.50)$$

que se distribuye aproximadamente $N(\gamma_t, 1)$, donde, $\gamma_t = (1/\sigma_Y) \ln(\sigma_t^2/\sigma_0^2)$, que es cero cuando el proceso está bajo control. Luego trunca el estadístico (1.50) utilizando la primera transformación de Winsor, $Z_t^+ = \max(0, Z_t)$, obteniendo el siguiente estadístico EWMA

$$W_t' = \lambda Z_t^+ + (1 - \lambda) W_{t-1}'.$$

Además, si Z_t sigue una distribución normal estándar, entonces según Barr y Sherrill (1999),

1.3 Gráficos de control de la variabilidad

la media y la varianza de Z_t^+ vienen dadas por $E(Z_t^+) = 1/\sqrt{2\pi}$ y $\sigma_{Z_t^+}^2 = (1/2) - [1/(2\pi)]$, respectivamente. Por otra parte, Shu y Jiang, en un proceso en estado estacionario (steady state), concluyen que la media de W_t' no es cero sino $1/\sqrt{2\pi}$ en el proceso bajo control. Para desplazar la media de W_t' a cero, entonces el estadístico del gráfico de control NEWMA debe ser

$$W_t = \lambda \left(Z_t^+ - 1/\sqrt{2\pi} \right) + (1 - \lambda) W_{t-1}, \quad (1.51)$$

donde $W_0 = 0$. Se da una señal de alarma si W_t supera el límite de control superior,

$$h = L\sigma_{Z_t^+}^2 \sqrt{(\lambda/(2 - \lambda))}.$$

Shu y Jiang (2008) compararon la relación señal-ruido del cambio entre su propuesta NEWMA y el gráfico EWMA de Crowder y Hamilton (1992) concluyendo que el NEWMA es mejor en la rapidez de detección del cambio en la variabilidad del proceso. Siguiendo un procedimiento similar al de Brook y Evans (1972) y Lucas y Saccucci (1990), plantean un procedimiento con cadenas de Markov que les permite aproximar la distribución de la longitud de rachas (RL) del gráfico NEWMA y por lo tanto el valor del ARL. Finalmente Shu y Jiang concluyen que el gráfico NEWMA supera al gráfico EWMA de Crowder y Hamilton (1992) para detectar aumentos en la varianza del proceso.

Hasta ahora, se ha venido revisando los gráficos de control EWMA para monitorizar la variabilidad del proceso suponiendo los parámetros conocidos. Sin embargo, en la práctica, los parámetros del proceso se suelen estimar a partir de un conjunto de datos históricos en control (Fase I). En este sentido, Maravelakis y Castagliola (2009) proponen un gráfico de control EWMA modificado para el control de la desviación estándar cuando se estiman los parámetros, situación que influye en el rendimiento debido a la variabilidad de los estimadores (Chen, 1997 y 1998).

Concretamente, Maravelakis y Castagliola (2009) estiman la varianza del proceso que se va a monitorizar a partir de los datos de la Fase I, compuesto de m muestras de tamaño n , X_{it} , $i = 1, \dots, n$, $t = 1, \dots, m$, asumiendo que $X_{it} \stackrel{iid}{\sim} N(\mu_0, \sigma_0)$, proponen un estimador insesgado de la varianza σ_0^2 como,

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{1}{m(n-1)} \sum_{t=1}^m \sum_{i=1}^n (X_{it} - \bar{X}_t)^2, \quad (1.52)$$

donde \bar{X}_t es la media de la t -ésima muestra. Luego en la Fase II, sean $Y_{1t}, Y_{2t}, \dots, Y_{nt}$, la t -ésima muestra, donde se asume que $Y_{it} \stackrel{iid}{\sim} N(\mu_0, \tau\sigma_0)$, siendo $\tau > 0$ la constante que refleja el cambio en la variabilidad, es decir, cuando $0 < \tau < 1$, refleja una disminución en la variabilidad, cuando $\tau = 1$, el proceso está bajo control y cuando $\tau > 1$, refleja un incremento en la variabilidad. Entonces, Maravelakis y Castagliola, considerando la varianza de la t -ésima muestra como $S_t^2 = (1/(n-1)) \sum_{i=1}^n (Y_{it} - \bar{Y}_t)^2$, donde \bar{Y}_t es la media de la t -ésima muestra, introducen el

estadístico EWMA como,

$$Z_t = \max \left(\lambda \ln \left(S_t^2 / \hat{\sigma}_0^2 \right) + (1 - \lambda) Z_{t-1}, 0 \right), \quad (1.53)$$

donde $0 \leq Z_0 < UCL$, donde UCL es el límite de control superior, el cual, Maravelakis y Castagliola deducen que es igual al propuesto por Crowder y Hamilton (1992).

Además, si definen $Q_t = (S_t^2 / \sigma_0^2)$ y $W = (\hat{\sigma}_0^2 / \sigma_0^2)$, de los cuales deducen sus funciones de densidad, entonces la división de $Q_t / W = S_t^2 / \hat{\sigma}_0^2$, permite reescribir (1.53) como el estadístico,

$$Z_t = \max \left(\lambda \ln (Q_t / W) + (1 - \lambda) Z_{t-1}, 0 \right). \quad (1.54)$$

A partir de este punto, Maravelakis y Castagliola (2009) derivan las principales propiedades de la RL : función de probabilidad, función de distribución acumulada, el ARL y la desviación estándar $SDRL$, utilizando el enfoque de ecuación integral y el de cadenas de Markov. Finalmente, realizan la comparación con el mismo gráfico de control EWMA pero con parámetros del proceso asumidos conocidos. Los resultados muestran que el gráfico estimando σ^2 necesita más datos en promedio con el fin de detectar una situación fuera de control que uno con σ^2 conocida. Otras aportaciones se pueden encontrar en Jones (2002) y Jensen et al. (2006), entre otros.

Castagliola et al. (2010) proponen un gráfico de control EWMA para monitorizar la varianza, utilizando la transformación S_B de Johnson de cuatro parámetros, al cual le llaman gráfico de control EWMA-J- S^2 . Este gráfico es una extensión del gráfico de Castagliola (2005) con el fin de hacerlo más eficiente en la detección de cambios en la variabilidad del proceso. En este sentido, si la varianza de la muestra t , S_t^2 , se define como en (1.37), entonces, Castagliola et al. (2010) introducen el estadístico siguiente

$$U_t = a + b \ln \left(\frac{S_t^2 - c}{c + d - S_t^2} \right), \quad (1.55)$$

donde $a, b, d > 0$ y c son los cuatro parámetros de la transformación. Por lo que su nuevo gráfico EWMA es definido por el estadístico,

$$U_t = (1 - \lambda) U_{t-1} + \lambda Z_t, \quad Z_0 = 0, \quad (1.56)$$

con límites de control similares a los de Castagliola (2005), es decir,

$$UCL|LCL = E(U_t) \pm L\sigma(U_t) \sqrt{(\lambda / (2 - \lambda))}. \quad (1.57)$$

Lo importante de este enfoque es encontrar los valores adecuados para los cuatro parámetros, de tal manera que U_t sea más normal que el estadístico utilizado en la transformación de tres

1.3 Gráficos de control de la variabilidad

parámetros. Castagliola et al. (2010) definen los parámetros como $a = A, b = B, c = C\sigma^2$ y $d = D\sigma^2$, donde A, B, C y D son valores que sólo dependen de n . Analizan las situaciones en las que $(S_t^2 - c) / (c + d - S_t^2)$ sea negativa y aseguran que la probabilidad de ocurrencia es bastante baja, sin embargo, si se produjera, se consideraría como una situación segura de fuera de control. Además, introducen la función de densidad de probabilidad y la de distribución de probabilidad acumulada de U_t , que a través de métodos de cuadratura, les permiten calcular los valores de $E(U_t)$ y $\sigma^2(U_t)$ para su correspondiente valor de n , demostrando que $E(U_t) \approx 0$ y $\sigma^2(U_t) \approx 1$.

Fijando los valores de los parámetros del gráfico λ y L , calculan el ARL tomando en cuenta el procedimiento de cadenas de Markov propuesto originalmente por Brook y Evans (1972). De manera análoga a la de Castagliola (2005), encuentran los valores óptimos de λ y L para obtener el ARL mínimo bajo un ARL_0 deseado. Finalmente, Castagliola et al. (2010) demuestran que la transformación de cuatro parámetros proporciona mejor aproximación de U_t a la normal que la de tres parámetros. En términos del ARL , concluyen que el comportamiento de su propuesta y la de Castagliola (2005) son muy similares, sin embargo sugieren utilizar el EWMA-J-S² si es de vital importancia detectar decrementos en la variabilidad.

Huwang et al. (2010) proponen tres gráficos de control EWMA para monitorizar la variabilidad de un proceso: dos gráficos de control EWMA unilaterales para detectar aumentos y decrementos de la variabilidad, respectivamente, y un gráfico EWMA bilateral para el monitoreo simultáneo de aumentos y decrementos de la variabilidad. De forma análoga a los gráficos EWMA anteriores, suponen que $X_{it}, i = 1, \dots, n$, es la t -ésima muestra de tamaño n , de un proceso cuyas observaciones siguen una distribución $N(\mu_t, \sigma_t^2)$, de la cual consideran, sin pérdida de generalidad que $\mu_t = 0$. Están interesados en detectar cambios en la varianza del proceso de $\sigma_t^2 = \sigma_0^2$ en $t < t^*$ a $\sigma_t^2 > \sigma_0^2$ en $t \geq t^*$. Además definen el parámetro que mide el desajuste como $\tau_t = (\sigma_t/\sigma_0)$ y la t -ésima varianza muestral $S_t^2 = (1/(n-1)) \sum_{i=1}^n (X_{it} - \bar{X}_t)^2$. Entonces introducen el estadístico EWMA como,

$$V_t = \lambda (S_t^2/\sigma_0^2) + (1 - \lambda) V_{t-1} = \sum_{j=1}^t \lambda (1 - \lambda)^{t-j} (S_j^2/\sigma_0^2) + (1 - \lambda)^t V_0, \quad V_0 = 1.$$

Dado que las varianzas muestrales S_j^2 son independientes, Huwang et al. (2010) utilizan la aproximación χ^2 de dos momentos propuesta por Box (1954) que conduce a,

$$V_t - (1 - \lambda)^t V_0 = \sum_{i=1}^t \lambda (1 - \lambda)^{t-i} (S_i^2/\sigma_0^2) \stackrel{A}{\sim} \Gamma(\beta_1, \beta_2), \quad (1.58)$$

donde β_1 y β_2 se calculan bajo ciertos supuestos. Luego, para obtener una aproximación normal,

aplican logaritmo a (1.58), obteniendo

$$\ln [V_t - (1 - \lambda)^t V_0] \overset{A}{\sim} N(\mu_R, \sigma_R), \quad (1.59)$$

con,

$$\mu_R = \ln(\beta_1 \beta_2) - \frac{1}{2\beta_1} - \frac{1}{12\beta_1^2} + \frac{1}{120\beta_1^4} \text{ y } \sigma_R = \frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{2\beta_1^2} + \frac{1}{6\beta_1^3} - \frac{1}{30\beta_1^5}. \quad (1.60)$$

Consecuentemente, los límites de control para (1.59) son más simétricos, por lo que la capacidad en la detección de incrementos o disminuciones en la variabilidad es prácticamente la misma. Además, Huwang et al. (2010) proponen un gráfico de control EWMA (HHW1) unilateral cuyo estadístico se obtiene normalizando (1.59) como,

$$U_t = \frac{\ln [V_t - (1 - \lambda)^t V_0] - \mu_R}{\sigma_R}, \quad (1.61)$$

cuyos límites de control superior o inferior se definen para obtener un ARL_0 deseado.

Huwang et al. (2010) puntualizan que a diferencia de los gráficos EWMA de Crowder y Hamilton (1992) y Shu y Jiang (2008) donde los estadísticos de monitoreo utilizan una desviación estándar constante (independiente de t) para desarrollar los límites de control, para el gráfico HHW1, la derivación que se utiliza para definir los límites de control de los estadísticos de monitoreo U_t , sí dependen de t , hecho que Huwang et al. (2010) precisan que es una ventaja de su propuesta respecto a los anteriores.

Otra alternativa de gráfico de control EWMA para monitorizar la varianza del proceso, se basa en una transformación normal exacta de S_i^2/σ_0^2 , es decir, definen $F(\cdot)$ como la función de distribución de una variable aleatoria χ_{n-1}^2 e introducen el estadístico $M_t = \Phi^{-1}[F\{(n-1)S_t^2/\sigma_0^2\}]$ que se distribuye normal estándar, resultando en el estadístico EWMA $H_t = \lambda M_t + (1 - \lambda)H_{t-1}$, $H_0 = 0$, el cual demuestran que, en un proceso bajo control, se distribuye normal con media cero y varianza $\lambda[1 - (1 - \lambda)^{2t}]/(2 - \lambda)$. Entonces el gráfico EWMA HHW2 bilateral lo obtienen normalizando H_t , resultando el estadístico EWMA como,

$$D_t = H_t / \sqrt{\lambda[1 - (1 - \lambda)^{2t}]/(2 - \lambda)},$$

cuyos límites de control superior e inferior se define para obtener el ARL_0 deseado. Huwang et al. (2010) también presentan las expresiones que permiten calcular la relación señal-ruido del cambio en la varianza para sus propuestas y en las comparaciones con Shu y Jiang (2008) concluyen que la relación señal-ruido no es un indicador fiable que determine el mejor comportamiento del gráfico. Para el análisis del comportamiento de los gráficos HHW1 y 2, presentan expresiones

1.3 Gráficos de control de la variabilidad

para el cálculo del ARL basado en el método de la ecuación integral recomendado por Crowder y Hamilton (1992). Sin embargo, encuentran muchas complicaciones en la resolución numérica, por lo que toman la decisión de hacer el cálculo del ARL por simulación utilizando 200000 repeticiones.

Huwang et al. (2010) finalmente muestran que el gráfico HHW2 se comporta mejor que el HHW1 y que los EWMA de Crowder y Hamilton (1992) (CH) y Shu y Jiang (2008) (SJ) para detectar aumentos en la variabilidad del proceso. Además muestran que el gráfico HHW1, supera significativamente al CH, SJ y al gráfico HHW2 en la detección de disminuciones en la variabilidad del proceso. La combinación del gráfico HHW1 lado inferior con el gráfico HHW2 lado superior, que resulta en el gráfico HHW-C, puede detectar con mayor eficiencia los cambios globales en la variabilidad del proceso que los gráficos bilaterales CH, SJ y gráficos HHW1 y HHW2.

Abbasi (2010) propone un gráfico de control EWMA para monitorizar la variabilidad, al que le llama TNEWMA. Su gráfico es una extensión del gráfico de control NEWMA de Shu y Jiang (2008) la cual se basa en considerar la naturaleza asintótica de los límites de control. Específicamente, considera el estadístico (1.51) de Shu y Jiang (2008) e introduce el límite de control,

$$h = L\sigma_{Z_t^+}^2 \sqrt{(\lambda [1 - (1 - \lambda)^{2t}] / (2 - \lambda))}.$$

Abbasi en su trabajo demuestra que se puede lograr la detección rápida de un fuera de control mediante el uso de estos límites de control exactos o variables en el tiempo. Los valores de los ARL de los dos gráficos NEWMA y TNEWMA los obtiene vía simulación (10000 replicaciones), tomando en cuenta que lo recomendado por Kim (2005) y Schaffer y Kim (2007) son 5000. Finalmente, muestra que el TNEWMA es mejor que el NEWMA para desajustes pequeños y con valores de λ pequeños.

Abbasi y Miller (2013) proponen un gráfico de control MDEWMA como una alternativa robusta y eficiente para la monitorización de la variabilidad del proceso. Este gráfico se basa en la estimación de la desviación típica del proceso, σ , usando las desviaciones medias absolutas, MD , tomadas de las medianas de las muestras, considerado un estimador más eficiente que el rango, particularmente cuando se viola la suposición de normalidad y el tamaño de la muestra es moderado o grande.

Recientemente, Haq et al. (2014) proponen nuevos gráficos de control EWMA para el monitoreo de la variabilidad del proceso basados en los mejores estimadores lineales insesgados absolutos obtenidos mediante muestreo aleatorio simple (SRS), esquemas de muestreo conjunto clasificado (RSS) y de clasificación imperfecta (IRSS), dando lugar a los gráficos de control EWMA-SRS, EWMA-RSS y EWMA-IRSS. Para estimar el ARL de los tres gráficos utilizan simulación de Monte Carlo con 100000 replicaciones. Haq et al. (2014) precisan que sus gráficos de control EWMA-SRS, RSS y IRSS se comportan uniformemente mejor que sus contrapartes CH-EWMA

y SJ-EWMA en la detección de los cambios globales en la variabilidad del proceso.

Otras aportaciones sobre los gráficos de control CUSUM y/o EWMA para monitorizar la variabilidad de un proceso se pueden encontrar en Tuprah y Ncube (1987), MacGregor y Harris (1993), Gan (1995), Lowry et al. (1995), Acosta-Mejia (1998), Amin et al. (1999), Lu y Reynolds (1999) y Acosta-Mejía et al. (1999), entre otros.

1.3.3. Gráficos de control adaptativos para la variabilidad

En la revisión bibliográfica acerca de los gráficos de control Shewhart, CUSUM y EWMA para el seguimiento de la variabilidad del proceso, se han propuesto algunas variantes, por lo general, introduciendo distintos estadísticos que en mayor o menor medida, mejoran la eficiencia en la detección de desajustes en la variabilidad del proceso. En este cometido, el objetivo de los gráficos de control adaptativos para la variabilidad es hacerlos más eficientes y equilibrados en la detección de desajustes pequeños, medianos y grandes. Esta mayor versatilidad se puede conseguir, entre otras alternativas, haciendo variar el factor de ponderación, λ , del EWMA, o k , del CUSUM. En la literatura existen diferentes alternativas para este propósito como veremos a continuación.

Gráfico de control ACUSUM-S²

Shu et al. (2010) proponen un gráfico de control CUSUM adaptativo para el seguimiento de desajustes de tamaño desconocido en la variabilidad del proceso. Es una extensión de los gráficos ACUSUM para el seguimiento de la media del proceso inicialmente propuestos por Sparks (2000). Este gráfico ajusta dinámicamente su valor de referencia de acuerdo con una estimación de la varianza actual del proceso y no requiere información precisa de la magnitud de los cambios en la variabilidad.

Por simplicidad, Shu et al. (2010) se centran en el uso de la varianza muestral S^2 para el seguimiento de los incrementos en la variabilidad. Además, suponen que la media del proceso se mantiene sin cambios en la Fase II y bajo control, la media y la varianza, μ_0 y σ_0^2 , son conocidas o estimadas con precisión. Ahora bien, sea X_{it} la i -ésima observación del t -ésimo subgrupo de tamaño n . Sin pérdida de generalidad, asumen que las observaciones X_{it} , $i = 1, \dots, n$ y $t = 1, \dots$ son independientes e idénticamente distribuidas normales con media y varianza, μ_0 y σ_0^2 . Cuando la media, μ_0 , es conocida, el estimador insesgado de la varianza es

$$S_t^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_{it} - \mu_0)^2. \quad (1.62)$$

La medida del cambio en la variabilidad se denota como $\tau^2 = \sigma_1^2/\sigma_0^2$, donde σ_1^2 es la nueva varianza del proceso. Entonces, suponiendo la medida del desajuste, τ , conocida, definen el

1.3 Gráficos de control de la variabilidad

estadístico CUSUM como,

$$U_t = \max [0, U_{t-1} + I_t], \quad (1.63)$$

donde, $I_t = (n/2) [1 - (1/\tau^2)] (Z_t - k)$ es el incremento del CUSUM en el t -ésimo subgrupo racional, siendo $Z_t = S_t^2/\sigma_0^2$ y el valor de referencia $k = \ln \tau^2 / [1 - (1/\tau^2)]$. Sin considerar el multiplicador $(n/2) [1 - (1/\tau^2)]$, definen el gráfico de control CUSUM superior e inferior como

$$C_t^+ = \max [0, C_{t-1}^+ + (Z_t - k)] \text{ y } C_t^- = \max [0, C_{t-1}^- - (Z_t - k)]. \quad (1.64)$$

Se da una señal de alarma si el estadístico CUSUM excede el límite de control h_c que a su vez se define para obtener el ARL_0 deseado. El problema de este planteamiento es que suponen que se conoce el desajuste, un supuesto incorrecto en la práctica. Para resolver el problema, Shu et al. (2010) toma en cuenta el esquema EWMA basado en Z_t que propone Mac-Gregor y Harris (1993)

$$Q_t = (1 - \lambda) Q_{t-1} + \lambda Z_t, \quad 0 < \lambda \leq 1 \text{ y } Q_0 = 1. \quad (1.65)$$

Además, apoyándose en Sparks (2000), denotan, τ_{\min}^{2+} y τ_{\max}^{2-} , como la medida mínima y máxima de variación donde $\tau_{\min}^{2+} > 1$ y $0 < \tau_{\max}^{2-} < 1$. Entonces reescriben el estadístico (1.65) para detectar incrementos y decrementos en la variabilidad como:

$$\tau_t^{2+} = \max (\tau_{\min}^{2+}, Q_t) \text{ y } \tau_t^{2-} = \min (\tau_{\max}^{2-}, Q_t), \quad (1.66)$$

por lo que, los valores de referencia serían $k_t^+ = \ln \tau_t^{2+} / [1 - (1/\tau_t^{2+})]$ y $k_t^- = \ln \tau_t^{2-} / [1 - (1/\tau_t^{2-})]$, y el nuevo estadístico del ACUSUM superior e inferior es

$$A_t^+ = \max [0, A_{t-1}^+ + (Z_t - k_t^+)] \quad (1.67)$$

$$A_t^- = \max [0, A_{t-1}^- - (Z_t - k_t^-)].$$

Se da una alarma cuando el estadístico excede el límite de control h_a . Además, considerando el multiplicador, sin el factor $n/2$, que se puede ver como una función de ponderación de las desviaciones $(Z_t - k_t^+)$ o $(Z_t - k_t^-)$, presentan el estadístico WACUSUM superior e inferior,

$$W_t^+ = \max [0, W_{t-1}^+ + [1 - (1/\tau_t^{2+})] (Z_t - k_t^+)] \quad (1.68)$$

$$W_t^- = \max [0, W_{t-1}^- + [1 - (1/\tau_t^{2-})] (Z_t - k_t^-)].$$

Se da una señal de alarma cuando el estadístico excede el límite de control h_w definido con el fin de obtener el ARL_0 deseado.

En cuestión de comportamientos, en términos del ARL , Shu et al. (2010) han demostrado

inicialmente que el gráfico WACUSUM es más eficiente que el ACUSUM. El cálculo del ARL se obtiene a partir de un modelo de cadenas de Markov de dos dimensiones en el proceso controlado en "zero state", y por simulación en "steady state". Los resultados de la comparación con el gráfico tradicional CUSUM para la variabilidad y otros procedimientos competitivos, favorecen al WACUSUM.

Gráfico de control AEWMA-S²

Es conocido que los gráficos de control EWMA para monitorizar la media de un proceso son más eficientes en la detección de desajustes pequeños que los gráficos de control Shewhart, pero menos eficientes cuando los desajustes son grandes. Yashchin (1995) investigó el comportamiento de la estimación EWMA en términos de una función de la inercia, el cual decanta en que la inercia aumenta en la medida que la media aumenta, resultando en que el estadístico EWMA con una constante de suavizado pequeña, no sea eficiente en la estimación de los cambios bruscos pequeños y grandes en la media de un proceso.

Dicho lo anterior, Yashchin, como solución al problema de inercia, propuso un estadístico EWMA modificado, conocido como EWMA-C, que puede ajustar dinámicamente el peso de las observaciones pasadas según una función del error de predicción; idea que Capizzi y Mastrotto (2003) desarrollaron en su gráfico de control AEWMA para el seguimiento de la media de un proceso. Otras formas de contrarrestar, en parte, la inercia del gráfico de control EWMA, es con el uso del gráfico Shewhart-EWMA combinado o con la adición de límites Shewhart, es por ello que el gráfico de control AEWMA (visto como una combinación suave entre Shewhart y EWMA) puede disminuir el problema de la inercia (ver detalles en la Sección 1.2.3).

En este sentido, Shu (2008) propone un gráfico de control EWMA adaptativo para monitorizar la variabilidad de un proceso. La idea básica del gráfico AEWMA propuesto se basa en ponderar dinámicamente las últimas observaciones de acuerdo con una función adecuada del error de predicción actual. Es en realidad una extensión de la idea del gráfico de control AEWMA para el seguimiento de la media de un proceso propuesto por Capizzi y Masarotto (2003) que, como se mencionó antes, se plantea como solución al problema de inercia que el gráfico de control EWMA tradicional presenta cuando se enfrenta a la detección de cambios grandes en la media del proceso. En este sentido, Shu (2008), apoyándose en el estadístico de Crowder y Hamilton (1992) presentado en (1.42), introduce el estadístico AEWMA para monitorizar los incrementos de la variabilidad como:

$$W_t = \max[0, W_{t-1} + \phi(e_t)], \quad W_0 = 0, \quad (1.69)$$

donde $e_t = x_t - W_{t-1}$. El gráfico de control AEWMA da una alarma cuando el estadístico supera el límite de control superior h definido con el fin de obtener el ARL_0 deseado. De forma análoga,

1.3 Gráficos de control de la variabilidad

se puede definir el estadístico AEWMA para monitorizar la disminución de la variabilidad como:

$$L_t = \min [0, L_{t-1} + \phi(e_t)] , \quad L_0 = 0. \quad (1.70)$$

Para detectar tanto aumentos como disminuciones en la variabilidad del proceso, Shu (2008) recomienda el uso de la combinación de estos dos gráficos unilaterales. Su trabajo se centra más en los incrementos de la variabilidad, por lo que, para la discusión, elige el gráfico unilateral para detectar incrementos en la variabilidad ya que es el que responde más rápido a los cambios.

Shu (2008) analiza la distribución del RL del gráfico propuesto (basado en $\ln S^2$). Esta discusión proporciona una visión clara en el comportamiento del ARL que se aproxima apoyándose en el procedimiento de cadenas de Markov presentado originalmente por Brook y Evans (1972). Finalmente, muestra que el gráfico AEWMA para monitorizar la variabilidad se comporta mejor que el EWMA en la detección de cambios pequeños y grandes; Además, ofrece un comportamiento de protección más equilibrado ante cambios de distintas magnitudes en la variabilidad del proceso que el gráfico Shewhart-EWMA combinado y que el gráfico CP-CUSUM.

Capítulo 2

Gráficos de control AEWMA con parámetro de suavizado variable en el tiempo

2.1. Introducción

Como se ha podido ver en el capítulo anterior, el diseño de un gráfico de control EWMA para la media consiste en la selección de los valores de λ en (1.3) y L en (1.16). Estos parámetros pueden ser elegidos de tal manera que el gráfico sea óptimo en la detección de un cambio δ especificado previamente y bajo un ARL_0 dado. La influencia en el comportamiento del EWMA de los parámetros mencionados ha sido estudiada por Crowder (1987a, 1989) y Lucas y Saccucci (1990), entre otros. Entonces, el ARL resultante es una función del desajuste δ , λ y L ; es decir, $ARL_\delta = ARL(\lambda, L|\delta)$. Los valores óptimos de λ y L que minimizan el $ARL(\lambda, L|\delta)$ se puede obtener usando procedimientos tradicionales de optimización no lineal. Este problema de optimización se puede escribir como

$$\begin{aligned} & \text{mín } ARL(\lambda, L|\delta) \\ & \text{sujeto a: } ARL(\lambda, L|\delta = 0) = ARL_0. \end{aligned}$$

El ARL mínimo se denota por ARL^* y su correspondiente parámetro óptimo λ^* . La Figura 2.1-a muestra la comparación entre los valores del ARL^* de los diseños óptimos (considerando el $ARL_0 = 100$) y los valores del ARL del rango de diseños con $ARL \leq ARL^* + 5\%$. Es decir, nos encontramos con el diseño óptimo para cada cambio, así como aquellos diseños que son casi óptimos en el sentido de que su ARL en cada cambio no es mayor que un 5 % de los mínimos. La Tabla 2.1 muestra que, por ejemplo, si $\delta = 1$, entonces es posible obtener un $ARL \in [6.96, 7.31]$ para un $\lambda \in [0.0874, 0.3158]$. La Figura 2.1-b muestra el rango $[\lambda_1, \lambda_2]$ de λ para el cual el valor del ARL varía en el intervalo $[ARL^*, ARL^* + 5\%]$. Por ejemplo, si $\lambda = 0.15$, es posible

obtener valores aceptables del ARL (con una diferencia menor que 5 % del ARL^*) para cambios pequeños de $\delta \approx 0.75$ a 1.25. Si $\lambda = 0.6$, es posible obtener valores aceptables del ARL para $\delta > 2$. Sin embargo, vemos que si queremos un EWMA con buen rendimiento para todos los cambios, tenemos que usar un λ variable.

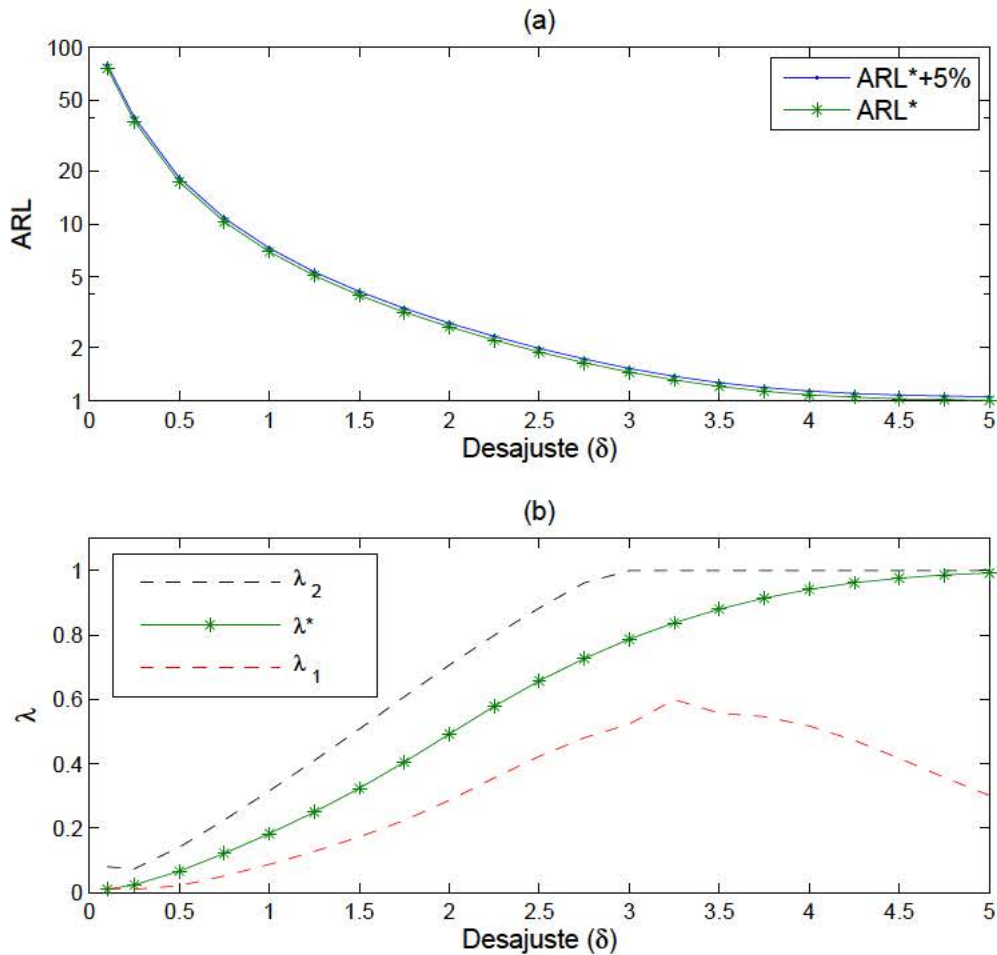


Figura 2.1: (a) Comparación entre los valores del ARL^* (-*-) y $ARL^* + 5\%$ (-.-). (b) Comportamiento de los λ óptimos (-*-), y un rango de variación definido por λ_1 (- -) y λ_2 (-.-).

El objetivo de los gráficos AEWMA es tener un comportamiento óptimo o casi óptimo para cualquier cambio. Esto podría conseguirse haciendo a λ variable en el tiempo, es decir $\lambda = \lambda_t$, con un valor que depende del cambio, como se muestra arriba. Sin embargo, en la práctica, la magnitud y el momento del cambio son desconocidos (de lo contrario, tendríamos que dar la alarma). Por lo tanto, es necesario encontrar una forma alternativa de introducir un gráfico de control EWMA adaptativo. Una opción natural es encontrar una medida de la evidencia del cambio mostrado por los datos, y traducir esa medida en un valor apropiado de λ_t . Si los datos sugieren que la media del proceso podría estar cambiando, el valor de λ_t aumentaría para permitir que y_t se deshaga de la

2.1 Introducción

δ	ARL ₀ = 100				ARL ₀ = 500			
	λ^*	ARL*	1.05ARL*	$[\lambda_1, \lambda_2]$	λ^*	ARL*	1.05ARL*	$[\lambda_1, \lambda_2]$
0.10	0.010	75.71	79.50	[0.010, 0.080]	0.010	216.73	227.56	[0.010, 0.017]
0.25	0.024	38.11	40.01	[0.010, 0.073]	0.016	74.39	78.10	[0.010, 0.034]
0.50	0.066	17.33	18.20	[0.021, 0.141]	0.047	28.76	30.20	[0.022, 0.085]
0.75	0.121	10.28	10.79	[0.051, 0.225]	0.087	15.80	16.59	[0.045, 0.147]
1.00	0.183	6.96	7.31	[0.087, 0.316]	0.133	10.21	10.72	[0.072, 0.217]
1.25	0.250	5.11	5.36	[0.128, 0.410]	0.186	7.24	7.60	[0.104, 0.292]
1.50	0.324	3.95	4.15	[0.173, 0.508]	0.242	5.46	5.74	[0.139, 0.369]
1.75	0.405	3.18	3.34	[0.224, 0.609]	0.301	4.31	4.52	[0.177, 0.449]
2.00	0.493	2.62	2.75	[0.286, 0.707]	0.365	3.51	3.69	[0.218, 0.532]
2.25	0.579	2.21	2.32	[0.356, 0.799]	0.437	2.94	3.08	[0.263, 0.620]
2.50	0.658	1.89	1.98	[0.424, 0.884]	0.517	2.50	2.62	[0.321, 0.709]
2.75	0.728	1.64	1.72	[0.481, 0.963]	0.599	2.15	2.25	[0.391, 0.795]
3.00	0.788	1.45	1.53	[0.524, 1.000]	0.676	1.86	1.96	[0.461, 0.874]
3.25	0.838	1.31	1.38	[0.599, 1.000]	0.742	1.64	1.71	[0.520, 0.947]
3.50	0.881	1.21	1.27	[0.558, 1.000]	0.799	1.46	1.53	[0.564, 1.000]
3.75	0.915	1.13	1.19	[0.547, 1.000]	0.847	1.32	1.38	[0.592, 1.000]
4.00	0.942	1.08	1.14	[0.518, 1.000]	0.886	1.21	1.27	[0.546, 1.000]
4.25	0.963	1.05	1.10	[0.473, 1.000]	0.919	1.14	1.19	[0.595, 1.000]
4.50	0.977	1.03	1.08	[0.417, 1.000]	0.944	1.09	1.14	[0.570, 1.000]
4.75	0.987	1.02	1.07	[0.358, 1.000]	0.963	1.05	1.10	[0.530, 1.000]
5.00	0.993	1.01	1.06	[0.302, 1.000]	0.978	1.03	1.08	[0.479, 1.000]

Tabla 2.1: Valores mínimos del ARL para cada cambio $\delta\sigma$ y el correspondiente λ .

información antigua, y acercarse a la nueva media, lo que, a su vez, facilitará a disparar la alarma. Por el contrario, si los datos muestran una baja evidencia de cambio, el parámetro λ_t se mantiene en un valor más bajo, para permitir la detección de posibles cambios pequeños.

En la literatura, la única propuesta de gráfico EWMA basado en el comportamiento de los datos es la de Capizzi y Masarotto (2003), que considera el estadístico EWMA definido en (1.23) o en (1.24), el cual es un EWMA con pesos variables ya que $w(e_t) = \phi(e_t)/e_t$, donde $e_t = x_t - y_{t-1}$. Capizzi y Masarotto (2003) proponen tres funciones de puntuación mencionadas con mayor detalle en el capítulo anterior, sin embargo, en esta ocasión nos centraremos en la función de puntuación, basada en la función de Huber:

$$\phi_{hu}(e) = \begin{cases} e + (1 - \lambda)k & \text{si } e < -k \\ \lambda e & \text{si } |e| \leq k \\ e - (1 - \lambda)k & \text{si } e > k \end{cases} \quad (2.1)$$

Notemos que $\phi_{hu}(e) = \lambda e$ cuando $k \rightarrow \infty$, reduciendo el gráfico de control AEWMA al EWMA tradicional (1.3). Por otra parte, cuando $\lambda = 1$ o $k = 0$, el gráfico AEWMA se comporta como un gráfico Shewhart. Este gráfico AEWMA se puede interpretar como un gráfico con parámetro de suavizado variable en el tiempo $w(e_t)$ de acuerdo con los datos de proceso. En particular, si la observación actual está cerca del valor anterior del estadístico del EWMA, entonces el valor de $w(e_t)$ debe ser pequeño (gráfico EWMA convencional), pero si la observación actual

no está cerca del valor previo del estadístico EWMA, entonces el valor de $w(e_t)$ debe ser grande, en ese caso el gráfico EWMA será similar al gráfico Shewhart. En este capítulo se van a analizar estrategias alternativas para obtener gráficos AEWMA con parámetro de suavizado variable en el tiempo, utilizando la representación

$$y_t = \lambda_t x_t + (1 - \lambda_t) y_{t-1}, \quad y_0 = \mu_0. \quad (2.2)$$

La alarma se activa tan pronto como $|y_t - \mu_0| > h\sigma$, donde h es un umbral que determina el ARL_0 .

A continuación, este capítulo se organiza de la siguiente manera. Para controlar la media de un proceso, en la Sección 2.2 se proponen algunas alternativas de gráficos de control EWMA adaptativos. Con ese objetivo, se sugieren varias medidas del potencial cambio en el proceso basadas en el valor de la última observación. Para cada medida del potencial cambio, se discuten métodos alternativos para traducir dicha medida en un factor o parámetro de suavizado variable en el tiempo. En la Sección 2.3 se plantean procedimientos para calcular el ARL basados en aproximaciones con cadenas de Markov. Adicionalmente, se presentan procedimientos de optimización para encontrar los diseños óptimos de los gráficos propuestos. En la Sección 2.4 se propone un gráfico de control EWMA adaptativo cuya medida del potencial desajuste en el proceso se basa en el valor del estadístico previo. Se sugiere una forma de traducir dicha medida en un factor o parámetro de suavizado variable en el tiempo. En la Sección 2.5 se introduce un procedimiento para calcular el ARL con cadenas de Markov y un procedimiento de optimización para encontrar el diseño óptimo de la última propuesta. En la Sección 2.6 se presentan algunas comparaciones numéricas de los procedimientos adaptativos propuestos con las principales alternativas en la literatura. Finalmente, en la Sección 2.7 se proporcionan algunas conclusiones.

2.2. Gráfico de control AEWMA con λ_t basado en la última observación x_t

En esta sección, se presentan algunas propuestas para λ_t como función del potencial desajuste basándose en la información proporcionada por la última observación x_t . La primera propuesta, denotada como AEWMA1, se basa en la distancia normalizada de x_t a la media μ_0 . La segunda propuesta, que se denota como AEWMA2, se basa en la distancia normalizada de x_t al valor del estadístico de monitorización previo y_{t-1} . Y, por último, la tercera propuesta es una combinación de las dos propuestas anteriores. Además, se proponen formas alternativas de traducir cada distancia en un factor de suavizado λ_t . El gráfico AEWMA de Capizzi y Massaroto (2003) es en parte similar a nuestra propuesta, AEWMA2.

2.2.1. Gráfico de control AEWMA1

Este gráfico de control adaptativo mide el potencial desajuste a través de la distancia estandarizada de la última observación x_t a la media. La medida del potencial desajuste se logra usando el siguiente estadístico

$$S_{1t} = \left(\frac{x_t - \mu_0}{\sigma} \right)^2, \quad (2.3)$$

que es una medida de la distancia de los datos del proceso al objetivo. Esta distancia tenderá a ser mayor en presencia de un cambio, por lo tanto es una medida interesante para el potencial desajuste. Dado y_{t-1} , el valor de x_t es una variable aleatoria. Si el proceso está bajo control, y bajo el supuesto de normalidad, se cumple que $S_{1t} \sim \chi_1^2$, con una función de distribución acumulada definida por

$$F_{1t} = P(\chi_1^2 \leq S_{1t}). \quad (2.4)$$

Tenemos que $F_{1t} \in [0, 1]$ y, además, tiende a aproximarse a la unidad en la medida que el proceso se acerca a estar fuera de control. Por lo tanto, podría ser utilizado como λ_t . Sin embargo, la variabilidad de F_{1t} puede ser muy grande, provocando un mal comportamiento en el gráfico AEWMA. Cabe señalar que, de acuerdo con (2.2), un valor grande de λ_t implica la pérdida de la mayor parte de la memoria acumulada en y_t , que no puede recuperarse incluso si λ disminuye en los siguientes instantes. Esta pérdida de memoria daría lugar a una gran variación del estadístico de monitorización y_t , disminuyendo su sensibilidad. Necesitamos, pues, una transformación que ayude a traducir F_{1t} en un parámetro de suavizado λ_t . Una transformación sencilla sería la de limitar el rango de variación de F_{1t} , haciendo una transformación lineal entre un valor inferior λ_{\min} y un valor superior λ_{\max} como sigue

$$\lambda_{1t}^{(1)} = \lambda_{\min} + (\lambda_{\max} - \lambda_{\min}) F_{1t}, \quad (2.5)$$

donde λ_{\min} y λ_{\max} son los valores que se han optimizado para alcanzar el ARL mínimo bajo un ARL_0 determinado, y se calculan con un procedimiento que se describe más adelante. Una segunda alternativa que adiciona cierta flexibilidad a la transformación (2.5) es incluir en la transformación una potencia

$$\lambda_{1t}^{(2)} = \lambda_{\min} + (\lambda_{\max} - \lambda_{\min}) F_{1t}^a, \quad (2.6)$$

donde a también se puede optimizar junto con λ_{\min} y λ_{\max} . La tercera propuesta para transformar F_{1t} en λ_t es el uso de un cierto umbral, p_0 , de tal manera que si $F_{1t}^a \leq p_0$ entonces $\lambda_t = \lambda_{\min}$. En consecuencia, se mantendrá un bajo factor de suavizado a menos que la evidencia del cambio sea grande. Si $F_{1t}^a > p_0$, mantenemos una transformación similar a (2.6) de tal manera que toda la

transformación sea continua. El factor resultante es

$$\lambda_{1t}^{(3)} = \lambda_{\min} + (\lambda_{\max} - \lambda_{\min}) q_{1t},$$

$$q_{1t} = \begin{cases} 0 & \text{si } F_{1t}^a \leq p_0, \\ \frac{F_{1t}^a - p_0}{1 - p_0} & \text{en caso contrario} \end{cases}, \quad (2.7)$$

donde el umbral p_0 es una constante que se puede optimizar junto con a , λ_{\min} , y λ_{\max} . Una cuarta alternativa con mayor flexibilidad es ajustar el siguiente polinomio

$$\lambda_{1t}^{(4)} = \max(0, \min(1, r_{1t})), \quad (2.8)$$

$$r_{1t} = d + (b + cF_{1t})^a. \quad (2.9)$$

Esta cuarta opción necesita también la optimización de cuatro parámetros. En los experimentos llevados a cabo, la opción (2.7) ha sido la transformación de mejor comportamiento. Por lo tanto, en aras de concisión, esta transformación será la única que se asuma en este trabajo para los gráficos AEWMA propuestos. El gráfico AEWMA1 activa una alarma si $|y_t - \mu_0| > h\sigma$, donde h es un umbral que depende del ARL_0 y se obtiene en el mismo ejercicio de optimización de p_0 , a , λ_{\min} , y λ_{\max} . La Figura 2.2 muestra un ejemplo de cómo el valor x_t se traduce en un factor de suavizado λ_t , con $\lambda_t = \lambda_{1t}^{(3)}$ en (2.7) para un diseño AEWMA1 particular, con un conjunto de parámetros (PS). Sin pérdida de generalidad, en esta propuesta y en las siguientes, se supone que $X_t \sim N(0, 1)$,

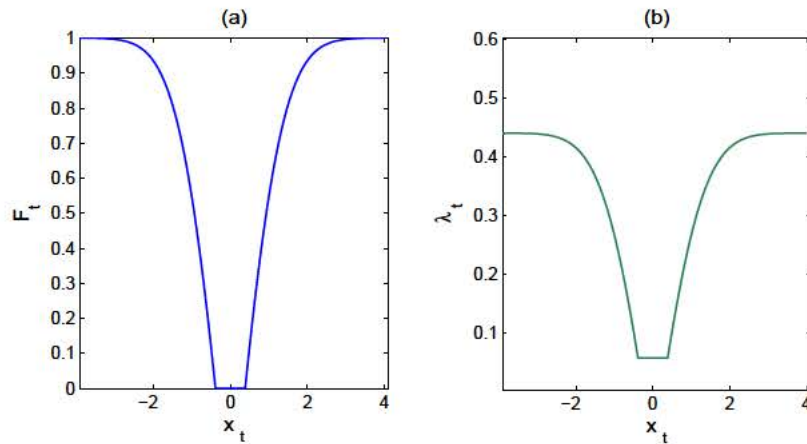


Figura 2.2: (a) Comportamiento de F_t en función de x_t . (b) Comportamiento de λ_t en función de x_t , con PS1: $\lambda_{\min} = 0.0564$, $\lambda_{\max} = 0.44$, $a = 1$, $p_0 = 0.3$, y $h = 0.3621$.

2.2.2. Gráfico de control AEWMA2

Este gráfico adaptativo mide el potencial desajuste mediante la diferencia entre el valor de la observación actual x_t y el valor del estadístico EWMA previo, y_{t-1} . Esto se hace mediante el uso del siguiente estadístico

$$S_{2t} = \left(\frac{x_t - y_{t-1}}{\sigma} \right)^2, \quad (2.10)$$

que como en la propuesta anterior, su valor crece en presencia de un desajuste. Este estadístico se puede expresar como

$$S_{2t} = \left(\frac{x_t - \mu_0}{\sigma} + \frac{\mu_0 - y_{t-1}}{\sigma} \right)^2 = \left(z_t + \frac{\mu_0 - y_{t-1}}{\sigma} \right)^2, \quad (2.11)$$

donde $z_t \sim N(0, 1)$. Por lo tanto, condicionado a y_{t-1} , S_{2t} sigue una distribución chi-cuadrada no centrada de un grado de libertad, $\chi_1^2(\gamma_t)$, con parámetro de no centralidad $\gamma_t = (\mu_0 - y_{t-1}) / \sigma$. La función de distribución acumulada será

$$F_{2t} = P(\chi_1^2(\gamma_t) \leq S_{2t}). \quad (2.12)$$

Como en el gráfico AEWMA1, se podría utilizar F_{2t} para traducir S_{2t} en un parámetro de suavizado variable en el tiempo, es decir, utilizando la transformación (2.6) para obtener dicho parámetro. Se puede observar, sin embargo, que el parámetro de no centralidad γ_t puede ser muy pequeño. Por ejemplo, si $\lambda = 0.1$, la expresión (1.15) muestra que y_{t-1} va a tener una variabilidad muy pequeña, $\sigma_{y_t}^2 \approx 0.053\sigma^2$. Por lo tanto, y_{t-1} estará muy cerca de μ_0 si se usa como unidad de distancia la desviación estándar σ . Consecuentemente, la magnitud del parámetro de no centralidad puede despreciarse para fines prácticos. Por lo que, en aras de la simplicidad, la conversión de S_{2t} en un factor de suavizado se hará como

$$\begin{aligned} \lambda_{2t} &= \lambda_{\min} + (\lambda_{\max} - \lambda_{\min}) q_{2t}, \\ q_{2t} &= \begin{cases} 0 & \text{si } G_{2t}^a \leq p_0, \\ \frac{G_{2t}^a - p_0}{1 - p_0} & \text{en otro caso,} \end{cases} \\ G_{2t} &= P(\chi_1^2 \leq S_{2t}), \end{aligned} \quad (2.13)$$

donde los parámetros λ_{\min} , λ_{\max} , p_0 , y a , se optimizan para minimizar el ARL cuando el proceso está fuera de control, para un ARL_0 dado usando el procedimiento que se describe más adelante. El gráfico AEWMA2 activa una alarma si $|y_t - \mu_0| > h\sigma$, donde h es un umbral que depende del ARL_0 y se obtiene en el mismo ejercicio de optimización de p_0 , a , λ_{\min} , y λ_{\max} .

Como se ha explicado anteriormente, puesto que la varianza de y_{t-1} será mucho menor que

la varianza de x_t para valores pequeños y moderados de λ (los que se utilizan en la práctica), el comportamiento general de S_{1t} y S_{2t} no será dramáticamente diferente. Sin embargo, es de esperar algunas diferencias dependiendo de la situación de fuera de control. Por ejemplo, si un proceso está cambiando lentamente, se puede esperar que S_{1t} tienda a adoptar valores más altos que S_{2t} , porque y_{t-1} también tenderá a desplazarse hacia la nueva media. Como resultado, tanto x_t como y_{t-1} estarán cambiando en la misma dirección y, en consecuencia, su diferencia en (2.10) podría no estar creciendo lo suficientemente rápido. En el caso de un cambio abrupto, el comportamiento de S_{1t} y S_{2t} depende de y_{t-1} . Si sucede que y_{t-1} está cerca de un límite de control y el cambio repentino se produce en la dirección opuesta, S_{2t} tenderá a ser más grande que S_{1t} . Esta situación es la que se describe en el denominado "problema de inercia" de los gráficos AEWMA, como se explica en Yaschin (1987) y Capizzi y Masarotto (2003), entre otros. Por el contrario, si el cambio está en la misma dirección en la que y_{t-1} se encuentra, S_{1t} sería más eficaz.

La Figura 2.3 ilustra cómo λ_{2t} varía en función de x_t , con dos conjuntos de parámetros, PS2 y PS3. Dado que el estadístico S_{2t} depende de y_{t-1} , se presentan dos curvas con diferentes valores de y_{t-1} para cada conjunto de parámetros. Cuando $y_{t-1} = 0$, el método es similar al AEWMA1, pues se supone que $\mu_0 = 0$.

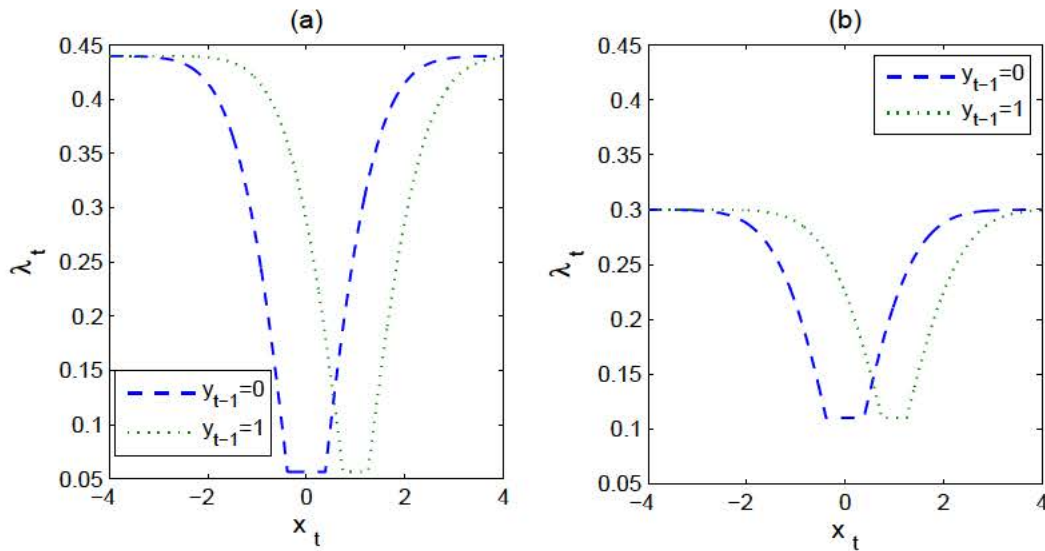


Figura 2.3: (a) Comportamiento de λ_t en función de x_t con $y_{t-1} = 0$ (---) e $y_{t-1} = 1$ (···) para el gráfico AEWMA2 con PS2: $\lambda_{\min}=0.0564$, $\lambda_{\max}=0.44$, $a=1$, $p_0=0.3$ y $h=0.3621$. (b) Comportamiento de λ_t en función de x_t con $y_{t-1} = 0$ (---) e $y_{t-1} = 1$ (···) para el gráfico AEWMA2 con PS3: $\lambda_{\min}=0.11$, $\lambda_{\max}=0.3$, $a=1$, $p_0=0.2$ y $h=0.3621$.

2.2.3. Gráfico de control AEWMA3

Dado que, tanto el gráfico AEWMA1 como el AEWMA2 pueden ser competitivos en función de la situación específica, puede ser interesante proponer un gráfico que combine ambos enfoques. Esto se puede hacer de varias maneras. Puesto que se desea aprovechar sus diferentes capacidades de detección, se propone un gráfico, denotado como AEWMA3, que en cada tiempo calcule ambos estadísticos, S_{1t} y S_{2t} , para obtener el estadístico S_{3t} como

$$S_{3t} = \max(S_{1t}, S_{2t}). \quad (2.14)$$

La conversión de S_{3t} en un factor de suavizado λ_{3t} se hace igual que en (2.13). El gráfico AEWMA3 activa una alarma si $|y_t - \mu_0| > h\sigma$, donde h es un umbral que depende del ARL_0 y esta optimizado junto con los parámetros utilizados en el cálculo de λ_{3t} . Este gráfico tendería a comportarse como el AEWMA1 o el AEWMA 2, dependiendo de cuál es más pesimista con respecto a la evidencia de desajuste.

La Figura 2.4 ilustra cómo λ_{3t} varía en función de x_t , con dos conjuntos de parámetros específicos, PS4 y PS5. Se debe tener en cuenta que se está usando un mismo conjunto de parámetros para ambos factores de suavizado, $\lambda_{1t}^{(3)}$ y λ_{2t} . Puesto que el estadístico S_{3t} también depende de y_{t-1} , se presentan dos curvas con diferentes valores de y_{t-1} por cada conjunto de parámetros.

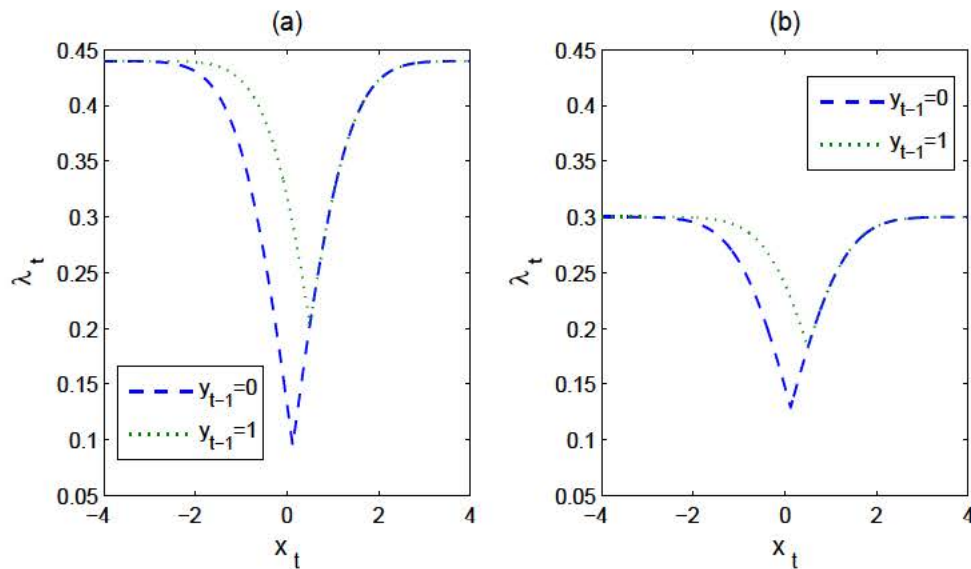


Figura 2.4: (a) Comportamiento de λ_t en función de x_t con $y_{t-1} = 0$ (---) e $y_{t-1} = 1$ (···) para el gráfico AEWMA3 con PS4: $\lambda_{\min} = 0.0564$, $\lambda_{\max} = 0.44$, $a = 1$, $p_0 = 0$ y $h = 0.3621$. (b) Comportamiento de λ_t en función de x_t con $y_{t-1} = 0$ (---) e $y_{t-1} = 1$ (···) para el gráfico AEWMA3 con PS5: $\lambda_{\min} = 0.11$, $\lambda_{\max} = 0.3$, $a = 1$, $p_0 = 0$ y $h = 0.3621$.

2.3. Cálculo del ARL usando el enfoque de cadenas de Markov

En esta sección se muestra un procedimiento para calcular el ARL de los gráficos AEWMA1, AEWMA2 y AEWMA3 utilizando el enfoque de cadenas de Markov. Al igual que en el modelo de cadenas de Markov sugerido por Lucas y Saccucci (1990) o Capizzi y Masarotto (2003), se puede aproximar el valor del ARL por discretización de la matriz de probabilidades de transición de estado infinito de la cadena de Markov de estado continuo definido por (2.2). Para mayor comodidad, el estadístico de control AEWMA se puede escribir como

$$y_t = y_{t-1} + (x_t - y_{t-1}) \lambda_t. \quad (2.15)$$

El procedimiento consiste en dividir el intervalo definido por los límites de control inferior y superior, intervalo de amplitud $2h\sigma$, en un número impar $ms = 2m + 1$ de subintervalos Ω_j , $j = -ms, -ms + 1, \dots, ms$, de amplitud $\Delta = 2h\sigma/ms$. Dichos subintervalos son interpretados como estados. El estadístico de control, y_t , se considera que está en el estado transitorio Ω_j , en el tiempo t , si $\nu_j - \Delta/2 < y_t < \nu_j + \Delta/2$, donde ν_j es el punto medio del j -ésimo intervalo, Ω_j . Por otra parte, y_t cae en el estado absorbente cuando se supera cualquiera de los umbrales $H = \mu_0 \pm h\sigma$. La matriz de probabilidades de transición entre estados se puede representar como

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{R} & (\mathbf{I} - \mathbf{R}) \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.16)$$

donde \mathbf{R} es una submatriz de $ms \times ms$ que contiene las probabilidades de ir desde el estado transitorio j al estado k , p_{jk} . \mathbf{I} es la matriz identidad de dimensión $ms \times ms$, y $\mathbf{1}$ es un vector de unos de dimensión $ms \times 1$. Los elementos del vector $(\mathbf{I} - \mathbf{R}) \mathbf{1}$ son las probabilidades de pasar del estado j al estado absorbente. Para aproximar estas probabilidades, es habitual suponer que el estadístico y_{t-1} es igual a ν_j cada vez que está en el estado j . Usando la expresión (2.15), las probabilidades se pueden escribir como

$$r_{jk} = \Pr(y_t \in \Omega_k | y_{t-1} \in \Omega_j) \quad (2.17)$$

$$= \Pr(\nu_k - \Delta/2 < y_t \leq \nu_k + \Delta/2 | y_{t-1} = \nu_j) \quad (2.18)$$

$$= \Pr(\nu_k - \Delta/2 < \nu_j + (x_t - \nu_j) \lambda_t \leq \nu_k + \Delta/2), \quad (2.19)$$

$$= \Pr(\nu_k - \nu_j - \Delta/2 < (x_t - \nu_j) \lambda_t \leq \nu_k - \nu_j + \Delta/2).$$

Ya que λ_t depende de x_t (por ejemplo, mediante (2.7)), no es posible resolver x_t en (2.19), y la distribución del producto $(x_t - \nu_j) \lambda_t$ no es trivial. Por lo tanto, con el fin de aproximar la

2.3 Cálculo del ARL usando el enfoque de cadenas de Markov

distribución, se discretiza x_t en $nx = 2n + 1$ subintervalos Ψ_i , $i = -n, -n + 1, \dots, n$. Dado que $x_t \sim N(\mu, \sigma^2)$, primero se selecciona un intervalo de probabilidad muy alta, y se divide en subintervalos. En consecuencia, se divide el intervalo $\mu \pm 4.5\sigma$, en $2n - 1$ subintervalos Ψ_i , $i = -n + 1, -n + 2, \dots, n - 1$, de amplitud $\varepsilon = 9\sigma/2n$, siendo u_i el punto medio del i -ésimo subintervalo, Ψ_i . Si $x_t \in \Psi_i$ entonces, $u_i - \varepsilon/2 < x_t \leq u_i + \varepsilon/2$. En cada uno de estos subintervalos, se aproxima x_t al valor de u_i . Se tiene entonces dos subintervalos más, que están en las colas de la distribución de x_t . La cola inferior es el intervalo Ψ_{-n} . Si $x_t \in \Psi_{-n}$ entonces $x_t \leq u_{-n+1} - \varepsilon/2$, y se aproximaría x_t al valor de $u_{-n+1} - \varepsilon$. Del mismo modo, la cola superior es el intervalo Ψ_n . Si $x_t \in \Psi_n$ entonces $x_t > u_{n-1} + \varepsilon/2$, y se aproximaría x_t al valor $u_{n-1} + \varepsilon$. Los valores aproximados para x_t se pueden utilizar para asignar un valor aproximado de λ_t en cada subintervalo. Si $x_t \in \Psi_i$, entonces

$$\begin{aligned} S_{1t} &\approx \left(\frac{u_i - \mu_0}{\sigma} \right)^2 \equiv c_i \text{ o } S_{2t} \approx \left(\frac{u_i - v_j}{\sigma} \right)^2 \equiv c_i \\ r_i &= P(\chi_1^2 < c_i) \\ q_i &= \begin{cases} 0 & \text{si } r_i^a \leq p_0, \\ \frac{r_i^a - p_0}{1 - p_0} & \text{en otro caso,} \end{cases} \\ \lambda_{(i)} &= \lambda_{\min} + (\lambda_{\max} - \lambda_{\min}) q_i. \end{aligned}$$

Ahora bien, para calcular la matriz de probabilidades r_{jk} en (2.17), podemos condicionar en cada subintervalo Ψ_i , y aplicar la fórmula de la probabilidad total como

$$r_{jk} = \Pr(\nu_k - \nu_j - \Delta/2 \leq (x_t - \nu_j) \lambda_t \leq \nu_k - \nu_j + \Delta/2) \quad (2.20)$$

$$= \sum_{i=-n}^n \Pr(\nu_k - \nu_j - \Delta/2 \leq (x_t - \nu_j) \lambda_t \leq \nu_k - \nu_j + \Delta/2 \mid x_t \in \Psi_i) \Pr(x_t \in \Psi_i) \quad (2.21)$$

$$\approx \sum_{i=-n}^n \Pr(\nu_k - \nu_j - \Delta/2 \leq (u_i - \nu_j) \lambda_{(i)} \leq \nu_k - \nu_j + \Delta/2) \Pr(x_t \in \Psi_i) \quad (2.22)$$

$$= \sum_{i=-n}^n \Pr\left(v_j + \lambda_{(i)}^{-1}(\nu_k - \nu_j - \Delta/2) \leq u_i \leq v_j + \lambda_{(i)}^{-1}(\nu_k - \nu_j + \Delta/2)\right) \Pr(x_t \in \Psi_i) \quad (2.23)$$

Debido a que u_i es constante en cada subintervalo, la primera probabilidad en el sumatorio de la expresión (2.23) se convierte en una función indicadora, es decir, toma valores 0 ó 1. Las siguientes probabilidades son también sencillas de calcular debido a que $x_t \sim N(\mu, \sigma^2)$. Finalmente, si $\mathbf{N} = (\mathbf{I} - \mathbf{R})^{-1} \mathbf{1}$, el ARL en *zero-state* (obtenido del proceso controlado a partir del estadístico

2.4 Gráfico EWMA adaptativo basado en el valor del estadístico de control

δ	AEWMA1-1	AEWMA2-1	AEWMA3-1	AEWMA1-2	AEWMA2-2	AEWMA3-2
λ_{\min}	0.0542	0.0570	0.0560	0.1629	0.1705	0.1579
λ_{\max}	0.1131	0.0968	0.0968	0.2514	0.2423	0.2429
a	5.1709	12.760	6.2038	9.9998	9.8870	7.5258
p_0	0.9911	0.9766	0.9878	0.9421	0.9369	0.9682
h	0.3231	0.3336	0.3301	0.7024	0.7194	0.6843

Tabla 2.2: Valores óptimos de los parámetros de los gráficos AEWMA. $ARL_0 = 100$.

δ	AEWMA1-1	AEWMA2-1	AEWMA3-1	AEWMA1-2	AEWMA2-2	AEWMA3-2
λ_{\min}	0.0427	0.0365	0.0356	0.1253	0.1291	0.1355
λ_{\max}	0.1155	0.1065	0.1040	0.2001	0.1956	0.2252
a	7.7337	7.5720	11.8925	1.4180	14.9812	8.7293
p_0	0.9963	0.9977	0.9928	0.9975	0.9409	0.9966
h	0.3832	0.3447	0.3425	0.7550	0.7685	0.7832

Tabla 2.3: Valores óptimos de los parámetros de los gráficos AEWMA. $ARL_0 = 500$.

explicada anteriormente. Estos gráficos se denotan por AEWMA1-2, AEWMA2-2 y AEWMA3-2.

La Tabla 2.2 muestra los valores óptimos de los parámetros de los gráficos AEWMA, para $ARL_0 = 100$. Del mismo modo, la Tabla 2.3 muestra los valores óptimos de los parámetros, para $ARL_0 = 500$. En este trabajo, por simplicidad, y sin pérdida de generalidad, los valores del ARL se calculan asumiendo que $\mu_0 = 0$ y $\sigma = 1$. Las Tablas 2.4 y 2.5 muestran los perfiles correspondientes del ARL.

2.4. Gráfico EWMA adaptativo basado en el valor del estadístico de control

En este gráfico AEWMA, denotado como AEWMA4, λ_t se basa en el valor de y_{t-1} . El estadístico depende de la distancia de y_{t-1} a uno de los límites de control $H = \mu_0 \pm h\sigma$, en consecuencia, el potencial desajuste se mide en base al cociente obtenido entre la dispersión de y_{t-1} y el límite de control más cercano (medidas en el intervalo: $(0, 1)$). El estadístico resultante se denota por D_t . Si y_{t-1} está más cerca de algún límite de control, más cerca está D_t de uno. El

δ	AEWMA1-1	AEWMA2-1	AEWMA3-1	AEWMA1-2	AEWMA2-2	AEWMA3-2
0.25	40.03	40.07	40.06	47.56	47.84	47.15
0.50	17.66	17.60	17.62	19.38	19.46	19.22
0.75	10.83	10.77	10.79	10.65	10.65	10.61
1.00	7.76	7.71	7.72	7.06	7.04	7.07
1.50	4.91	4.89	4.89	4.12	4.11	4.16
2.00	3.52	3.55	3.53	2.87	2.87	2.91
2.50	2.66	2.72	2.69	2.16	2.17	2.20
3.00	2.06	2.15	2.12	1.69	1.72	1.74
3.50	1.63	1.72	1.70	1.39	1.41	1.42
4.00	1.33	1.41	1.40	1.20	1.21	1.22
5.00	1.06	1.09	1.08	1.03	1.04	1.04

Tabla 2.4: Valores de ARL óptimos con $ARL_0 = 100$.

δ	AEWMA1-1	AEWMA2-1	AEWMA3-1	AEWMA1-2	AEWMA2-2	AEWMA3-2
0.25	84.97	82.00	82.70	126.55	128.57	128.53
0.50	29.50	29.53	29.80	35.28	35.69	35.66
0.75	16.95	17.29	17.43	16.69	16.75	16.69
1.00	11.80	12.17	12.24	10.40	10.38	10.33
1.50	7.27	7.61	7.57	5.80	5.76	5.76
2.00	5.13	5.43	5.30	3.96	3.93	3.98
2.50	3.78	4.06	3.85	2.94	2.92	3.01
3.00	2.80	3.04	2.80	2.28	2.28	2.37
3.50	2.09	2.26	2.06	1.82	1.84	1.88
4.00	1.61	1.70	1.58	1.50	1.53	1.53
5.00	1.13	1.15	1.12	1.13	1.15	1.13

Tabla 2.5: Valores de ARL óptimos con $ARL_0 = 500$.

estadístico resultante es

$$D_t = \left| \frac{y_{t-1} - \mu_0}{H - \mu_0} \right| = \left| \frac{y_{t-1} - \mu_0}{h\sigma} \right|,$$

que usando (2.7) con $F_{1t} = D_t$ o (2.13) con $G_{2t} = D_t$, se puede traducir en un parámetro de suavizado variable en el tiempo λ_{4t} . El gráfico AEWMA4 activa una alarma si $|y_t - \mu_0| > h\sigma$, donde h es un umbral que depende del ARL_0 y está optimizado junto con los parámetros utilizados en el cálculo de λ_{4t} .

Teniendo en cuenta dos diseños del AEWMA4, Dis-1 y Dis-2, con dos conjuntos de parámetros, PS6 y PS7. La Figura 2.5 muestra que λ_t aumenta más rápido cuando la distancia D_t aumenta. Cuando el proceso está fuera de control, λ_t tiende a tomar el mayor valor posible.

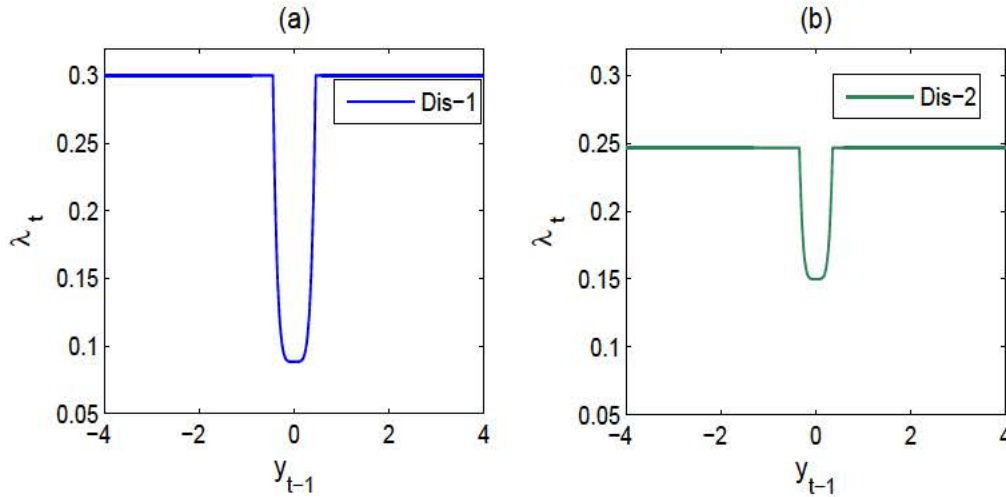


Figura 2.5: (a) Comportamiento de λ_t en función de y_{t-1} para el gráfico AEWMA4 con diseño Dis-1 con PS6: $\lambda_{\min} = 0.0882$, $\lambda_{\max} = 0.3$, $a = 5$, $p_0 = 0$ y $h = 0.4515$. (b) Comportamiento de λ_t en función de y_{t-1} para el gráfico AEWMA4 con diseño Dis-2 con PS7: $\lambda_{\min} = 0.15$, $\lambda_{\max} = 0.2467$, $a = 5$, $p_0 = 0$ y $h = 0.35$.

2.5 Cálculo del ARL del AEWMA4 usando el enfoque de cadenas de Markov

δ	$ARL_0 = 100$		$ARL_0 = 500$	
	AEWMA4-1	AEWMA4-2	AEWMA4-1	AEWMA4-2
λ_{\min}	0.0749	0.1896	0.0519	0.0943
λ_{\max}	0.3214	0.2179	0.1519	0.3034
a	8.1296	14.8801	9.5670	9.9854
p_0	0.9920	0.9800	0.8759	0.7347
h	0.4027	0.7590	0.4280	0.6212

Tabla 2.6: Valores óptimos de los parámetros de los gráficos AEWMA.

2.5. Cálculo del ARL del AEWMA4 usando el enfoque de cadenas de Markov

En este gráfico de control AEWMA, ya que λ_t no depende de x_t , se puede seguir el procedimiento tradicional, es decir, tomando (2.19) como sigue

$$\begin{aligned} r_{jk} &= \Pr(\nu_k - \nu_j - \Delta/2 \leq (x_t - \nu_j) \lambda_t \leq \nu_k - \nu_j + \Delta/2) \\ &= \Pr\left(\frac{\nu_k - \nu_j - \Delta/2}{\lambda_t} - \nu_j \leq x_t \leq \frac{\nu_k - \nu_j + \Delta/2}{\lambda_t} - \nu_j\right), \end{aligned}$$

y entonces, si $\mathbf{N} = (\mathbf{I} - \mathbf{R})^{-1} \mathbf{1}$, se calcula el ARL como

$$ARL = \mathbf{N}((ms + 1)/2).$$

Finalmente, los valores óptimos de los parámetros se pueden obtener utilizando (2.24). Por lo tanto, considerando un proceso controlado en zero-state con un $ARL_0 = 100$ (o un $ARL_0 = 500$), subgrupos racionales de tamaño $n = 1$ y λ definido por el gráfico AEWMA4 propuesto, se obtienen dos diseños. El primero utiliza el criterio de optimalidad: reducir al mínimo el ARL en el rango de cambios $\delta \in [0.5, 4]$, con mayor énfasis en los bordes del rango. Este diseño se denota por AEWMA4-1. El segundo diseño utiliza el criterio de optimalidad: reducir al mínimo el ARL en el rango de cambios $\delta \in [1, 4]$ con mayor énfasis en los bordes del rango. Este diseño se denota por AEWMA4-2. La Tabla 2.6 muestra los valores óptimos de los parámetros. La Tabla 2.7 muestra los perfiles de los ARL .

2.6. Comparaciones

En la práctica, es muy importante la detección de cambios pequeños, incluso más que la detección de cambios grandes, en la media de un proceso. Lo normal es que los cambios grandes ocurran paulatinamente, es decir, empezando por un cambio pequeño que gradualmente crece hasta hacerse más grande. En este respecto, esta sección, presenta la comparación de diferentes diseños de los gráficos de control AEWMA propuestos. Además, se comparan con otros gráficos

δ	$ARL_0 = 100$		$ARL_0 = 500$	
	AEWMA4-1	AEWMA4-2	AEWMA4-1	AEWMA4-2
0.25	40.08	47.21	85.19	105.04
0.50	17.35	19.26	28.87	31.25
0.75	10.47	10.52	16.32	15.94
1.00	7.44	6.96	11.30	10.42
1.50	4.74	4.10	7.03	6.15
2.00	3.53	2.95	5.16	4.41
2.50	2.84	2.34	4.12	3.48
3.00	2.41	1.98	3.45	2.91
3.50	2.13	1.73	3.00	2.51
4.00	1.96	1.51	2.66	2.21
5.00	1.65	1.16	2.13	1.96

Tabla 2.7: Valores óptimos de ARL.

de control tales como los gráficos de control EWMA tradicionales, gráficos de control Shewhart, gráficos de control AEWMA de Capizzi y Masarotto (2003) y gráficos de control ACUSUM de Jiang et al. (2008). Por otra parte, se está considerando el ARL en zero state y en las figuras, para mejor visualización, se está adoptando una escala logarítmica a menos que se indique lo contrario.

2.6.1. Resultados con $ARL_0=100$

La Tabla 2.8 muestra los ARL obtenidos para los ocho gráficos AEWMA propuestos y para los cinco gráficos antes mencionados. Se puede observar que el comportamiento de los cuatro primeros gráficos AEWMA propuestos es similar para cambios pequeños, en el rango de cambios (0, 0.5). Para el rango de cambios [0.5, 2), los tres primeros AEWMA (AEWMA1-1, 2-1 y 3-1) son competitivos, siendo el AEWMA4-1 ligeramente mejor. Para el cambio $\delta = 2$, el AEWMA1-1 es ligeramente el mejor. En el rango de cambios (2, 5], los tres primeros gráficos AEWMA muestran un comportamiento similar y mejor que el del AEWMA4-1, siendo el primero un poco mejor que los otros. Definitivamente el AEWMA4-1 pierde eficiencia para cambios grandes. Por otro lado, respecto a los segundos cuatro gráficos AEWMA se puede decir que el comportamiento también es similar para cambios pequeños en la media del proceso, aproximadamente en el rango (0, 0.5], donde los AEWMA1-2, 2-2 y 4-2 son muy competitivos, siendo el AEWMA3-2 el mejor. En ese intervalo, el AEWMA2-2 es el menos competitivo. En el intervalo de cambios (0.5, 2), los primeros tres AEWMA tienen un comportamiento con mínimas diferencias, sin embargo, cabe mencionar que el AEWMA4-2 es el más competitivo. El AEWMA1-2 es ligeramente mejor que sus similares en el rango de cambios [2, 5], siendo el AEWMA4-2 el menos eficiente.

Alternativamente, la Tabla 2.8 permite comparar los valores del ARL de los cuatro gráficos AEWMA y dos gráficos EWMA. Los dos gráficos EWMA se han diseñado para obtener valores del ARL mínimos para cambios $\delta = 1$ (E-1) y $\delta = 2$ (E-2). En este caso, se puede observar que los cuatro gráficos de control AEWMA propuestos y E-1 tienen un comportamiento similar para $\delta = 1$, siendo E-1 ligeramente mejor en cambios muy cercanos a 1, sin embargo, para el resto de

2.6 Comparaciones

	δ										
	0.25	0.50	0.75	1.00	1.50	2.00	2.50	3.00	3.50	4.00	5.00
1-1	40.03	17.66	10.83	7.76	4.91	3.52	2.66	2.06	1.63	1.33	1.06
2-1	40.07	17.60	10.77	7.71	4.89	3.55	2.72	2.15	1.72	1.41	1.09
3-1	40.06	17.62	10.79	7.72	4.89	3.53	2.69	2.12	1.70	1.40	1.08
4-1	40.08	17.35	10.47	7.44	4.74	3.53	2.84	2.41	2.13	1.96	1.65
1-2	47.56	19.38	10.65	7.06	4.12	2.87	2.16	1.69	1.39	1.20	1.03
2-2	47.84	19.46	10.65	7.04	4.11	2.87	2.17	1.72	1.41	1.21	1.04
3-2	47.15	19.22	10.61	7.07	4.16	2.91	2.20	1.74	1.42	1.22	1.04
4-2	47.21	19.26	10.52	6.96	4.10	2.95	2.34	1.98	1.73	1.51	1.16
E-1	46.82	19.11	10.49	6.96	4.12	2.97	2.36	2.00	1.75	1.53	1.17
E-2	62.84	28.64	14.52	8.53	4.12	2.62	1.93	1.55	1.30	1.15	1.02
S-1	80.83	49.99	29.09	17.33	7.09	3.54	2.13	1.51	1.22	1.08	1.01
CM-1	40.08	17.52	10.63	7.56	4.78	3.46	2.64	2.05	1.62	1.32	1.06
CM-2	47.81	19.53	10.63	7.00	4.09	2.89	2.23	1.80	1.51	1.29	1.06

Tabla 2.8: Valores del ARL con $ARL_0 = 100$. Se consideran: AEWMA1-1 (1-1), AEWMA2-1 (2-1), AEWMA3-1 (3-1), AEWMA1-1 (4-1), AEWMA1-2 (1-2), AEWMA2-2 (2-2), AEWMA3-2 (3-2), AEWMA4-2 (4-2), EWMA1 (E-1), EWMA2 (E-2), Shewhart (S-1), AEWMA-CM-1 (CM-1) y AEWMA-CM-2 (CM-2).

cambios, los gráficos propuestos son mejores. El gráfico E-2 es el más competitivo para $\delta = 2$, pero para cambios menores ($\delta \leq 1$), los gráficos adaptativos son mucho más competitivos. Para cambios mayores, los seis gráficos son similares, siendo el menos competitivo el gráfico E-1. En la mencionada tabla también podemos comparar los valores del ARL de los cuatro segundos gráficos AEWMA y los mismos dos EWMA. En este caso, se puede observar que E-1 es ligeramente más competitivo que los cuatro gráficos AEWMA propuestos, aproximadamente en el intervalo $(0, 1]$. Para cambios mayores, los gráficos adaptativos son los más competitivos. En cuanto al E-2, se puede observar que es menos competitivo para cambios pequeños. Como se esperaba, sólo es ligeramente el más competitivo para $\delta = 2$, para cambios menores es menos competitivo que los adaptativos propuestos, sin embargo, para cambios grandes, los seis gráficos son competitivos, siendo nuevamente el E-1 el menos eficiente.

Por otro lado, en la Tabla 2.8 también podemos comparar los ocho gráficos AEWMA y un gráfico de control Shewhart con el tamaño del subgrupo racional $n = 1$ (S -1). Se puede observar que el gráfico de control Shewhart tiene un pobre comportamiento para cambios pequeños y medianos, hasta $\delta = 2$.

A continuación, se comparan los cuatro gráficos AEWMA con dos diseños AEWMA de Capizzi y Masarotto (2003) basados en la función de puntuación de Huber. Estos dos diseños son considerados por Capizzi y Masarotto (2003) como los mejores en términos del ARL (denominados aquí CM-1 y CM-2 para un $ARL_0 = 100$). Hay que tener en cuenta que el diseño CM-1 ha sido optimizado para obtener los mínimos valores de ARL en el rango de cambios $[0.5, 5]$ y el diseño CM-2 en el rango de cambios $[1, 5]$. En la Tabla 2.8 se puede observar que, en general, los cuatro gráficos AEWMA (1-1, 2-1, 3-1 y 4-1) y CM-1, así como los segundos cuatro gráficos AEWMA

(1-2, 2-2, 3-2 y 4-2) y CM-2, son muy similares en casi todo el rango de cambios. Considerando el primer grupo (AEWMA (1-1, 2-1, 3-1 y 4-1) y CM-1), se pueden observar diferencias mínimas en el ARL para cambios pequeños, aproximadamente en el rango de cambios (0, 0.5), siendo el AEWMA1-1 ligeramente el más competitivo en $\delta = 0.25$. El AEWMA4-1 es el mejor en el rango [0.5, 1]. Para cambios mayores, los cinco gráficos presentan un buen comportamiento, siendo CM-1 el mejor.

Considerando el segundo grupo (AEWMA (1-2, 2-2, 3-2 y 4-2) y CM-2), para cambios pequeños, por ejemplo, para $\delta = 0.25$, los gráficos AEWMA1-2, 3-2 y 4-2 son mejores que el resto, siendo el gráfico AEWMA3-2 el mejor de todos. Para $\delta = 0.5$, todos los gráficos propuestos son mejores que CM-2, siendo el AEWMA3-2 el mejor. En el rango (0.5, 1], los cinco gráficos son competitivos, siendo el AEWMA4-2 el mejor. Notemos que en el rango (0, 1], el AEWMA4-2 es el mejor y en $\delta = 1.5$, CM-2 es ligeramente mejor. En el rango (1.5, 5], el AEWMA1-2 es el mejor seguido por el AEWMA2-2. Nótese que el AEWMA3-2 es mejor que CM-2 en el rango (2, 5]. Todas las comparaciones se pueden observar en las Figuras 2.6, 2.7, 2.8 y 2.9.

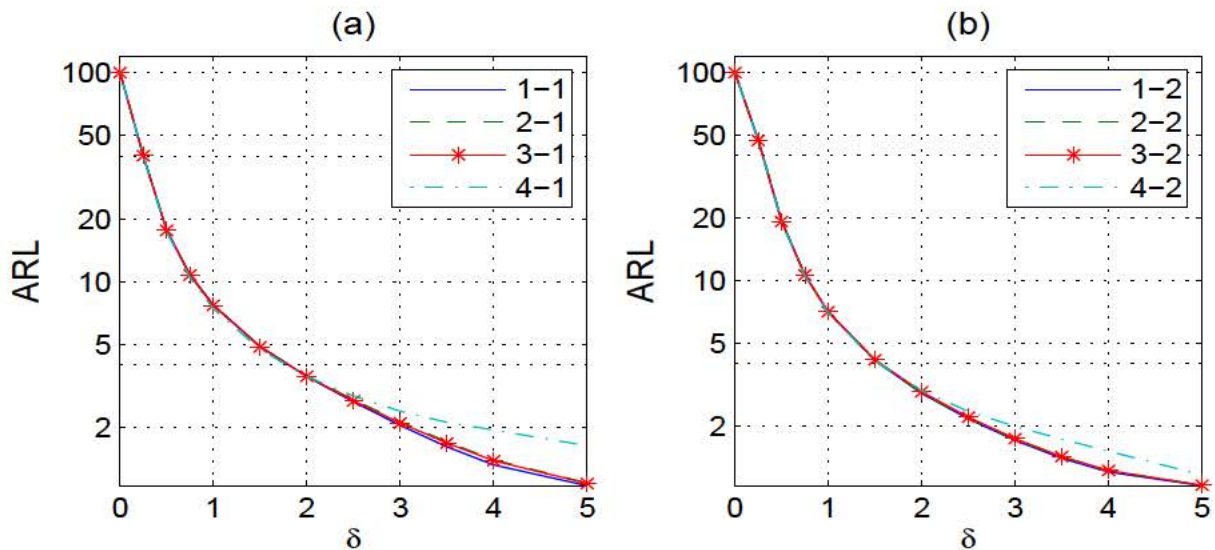


Figura 2.6: (a) Comparación del ARL de los primeros cuatro diseños AEWMA propuestos, AEWMA-(1-1, 2-1, 3-1, 4-1). (b) Comparación del ARL de los segundos cuatro diseños AEWMA, AEWMA-(1-2, 2-2, 3-2, 4-2). $ARL_0 = 100$.

2.6.2. Resultados con $ARL_0=500$

Comparando los primeros cuatro gráficos propuestos, la Tabla 2.9 muestra que el AEWMA2-1 es ligeramente mejor para cambios pequeños, aproximadamente en el intervalo de cambios (0, 0.5), siendo el mejor el AEWMA2-1. En $\delta = 0.5$, el AEWMA1-1 es el mejor. En el rango de cambios [0.75, 1.5], el AEWMA4-1 es el que tiene mejor comportamiento y los tres primeros

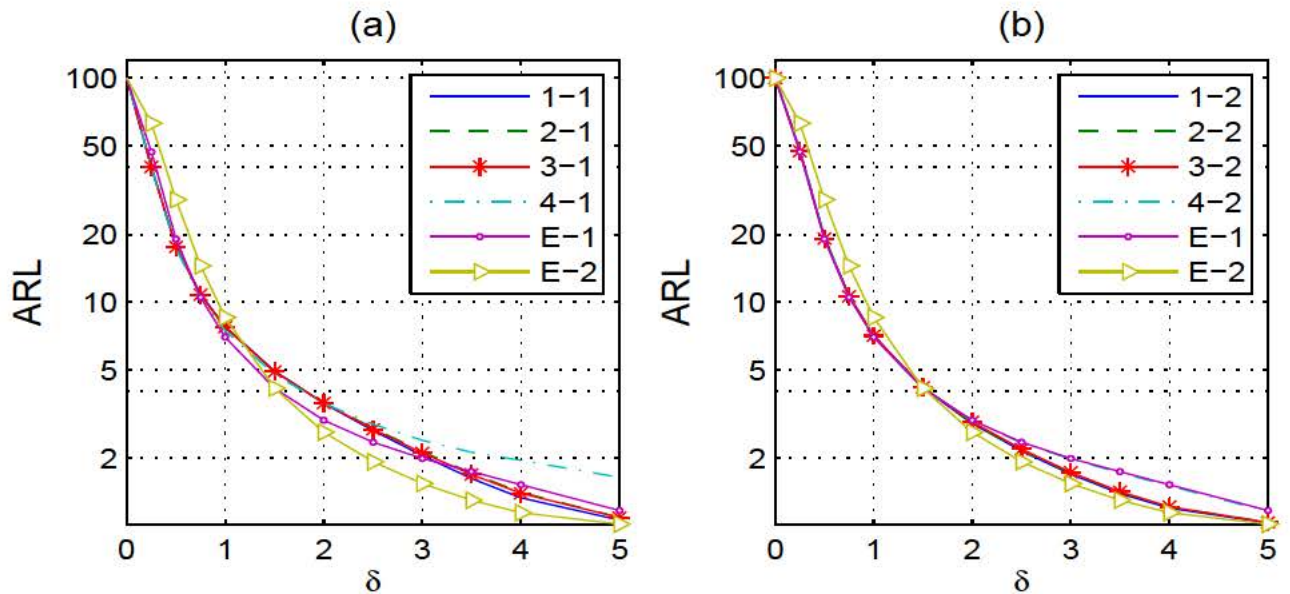


Figura 2.7: (a) Comparación del ARL de los primeros cuatro diseños AEWMA propuestos, AEWMA-(1-1, 2-1, 3-1, 4-1) y del EWMA (E-1, E-2). (b) Comparación del ARL de los segundos cuatro diseños AEWMA, AEWMA-(1-2, 2-2, 3-2, 4-2) y del EWMA (E-1, E-2). $ARL_0 = 100$.

son bastante similares. Para cambios grandes, en el rango $[2, 2.5]$, mejor es el AEWMA1-1 y en el rango $[3, 5]$, el AEWMA3-1 es mejor. Respecto a los segundos cuatro gráficos propuestos se puede observar que para cambios pequeños, en el intervalo $(0, 0.75]$, todos los gráficos tienen un comportamiento similar, siendo el más competitivo el AEWMA4-2, luego, entre los tres primeros, el AEWMA1-2 es el más competitivo. Para $\delta = 1$, el AEWMA3-2 es el mejor seguido por el AEWMA2-2. Para cambios más grandes, en el intervalo $(1, 3]$, el AEWMA2-2 muestra un mejor comportamiento. Para el rango $(3, 5]$, el AEWMA1-2 es el más competitivo. Nótese que en el rango $(1, 5]$, los gráficos AEWMA1-2 y 2-2 son los más eficientes. En general, los cuatro gráficos AEWMA muestran un buen comportamiento.

Adicionalmente, se pueden comparar los primeros cuatro gráficos propuestos con dos gráficos EWMA diseñados para obtener valores de ARL mínimos para cambios $\delta = 1$ (E-3) y $\delta = 2$ (E-4). En este caso, la Tabla 2.9 muestra que los cuatro gráficos AEWMA propuestos son los más competitivos para cambios pequeños, en el intervalo $(0, 0.5]$. Siendo el E-3 el más competitivo en el intervalo $(0.5, 3]$, sin embargo, para el resto de cambios, los tres primeros gráficos propuestos son mejores. El gráfico E-4 es ligeramente competitivo a partir de $\delta = 1.5$ en adelante, siendo el más competitivo para $\delta = 2$. Para cambios grandes el E-3 es el menos competitivo. Dicha tabla también permite comparar los valores del ARL de los cuatro segundos gráficos AEWMA y los mismos dos EWMA. En este caso, se puede observar que el AEWMA4-2 es el mejor en el intervalo $(0, 0.75]$. El E-3 es el más competitivo en $\delta = 1$, de ese cambio en adelante, el gráfico

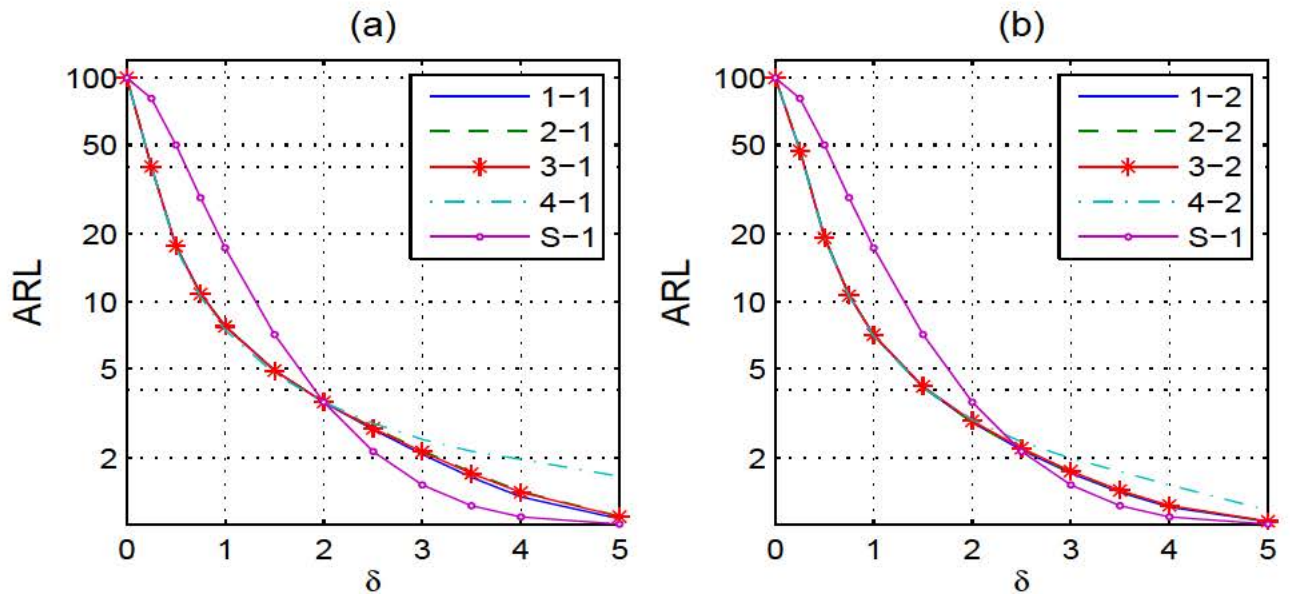


Figura 2.8: (a) Comportamiento del ARL de los primeros cuatro diseños AEWMA propuestos, AEWMA-(1-1, 2-1, 3-1, 4-1) y de Shewhart con $n = 1$ (S-1). (b) Comparación del ARL de los segundos cuatro diseños AEWMA, AEWMA-(1-2, 2-2, 3-2, 4-2) y de Shewhart con $n = 1$ (S-1). $ARL_0 = 100$.

AEWMA2-2 es el más eficiente seguido por el AEWMA3-2 y el 1-2. En cuanto al E-4, se puede observar que es menos competitivo para cambios pequeños, pero a partir del cambio $\delta = 1.5$ en adelante es ligeramente más competitivo que el resto. Por otro lado, en la Tabla 2.9 también podemos comparar los cuatro primeros gráficos AEWMA y un gráfico de control Shewhart con el tamaño del subgrupo racional $n = 1$ (S-2). Se puede observar que el gráfico de control Shewhart no es competitivo para cambios pequeños y medianos, hasta $\delta = 2$, que era lo que se esperaba. Además, si lo comparamos con los segundos cuatro gráficos AEWMA, Shewhart no es competitivo hasta $\delta = 2.5$.

A continuación, se comparan los cuatro gráficos AEWMA con dos diseños AEWMA de Capizzi y Masarotto (2003) basados en la función de puntuación de Huber. Estos dos diseños son también considerados por Capizzi y Masarotto (2003) como los mejores en términos del ARL (denominados aquí CM-3 y CM-4 para un $ARL_0 = 500$). Son diseños optimizados para obtener los mínimos valores de ARL en el rango de cambios $[0.5, 5]$ y $[1, 5]$, respectivamente. En la Tabla 2.9 podemos comparar los cuatro primeros gráficos de control propuestos y el gráfico CM-3. Se puede observar que estos gráficos AEWMA son los más competitivos para cambios pequeños, específicamente, en el rango $(0, 0.5]$. Para el rango $(0.5, 1]$, los gráficos AEWMA1-1 y 4-1 son mejores que CM-3, siendo el mejor el AEWMA4-1 incluso hasta $\delta = 1.5$. Para cambios mayores, los cinco gráficos son competitivos, siendo ligeramente mejor el CM-3. Por otro lado, si comparamos los segundos cuatro gráficos propuestos con CM-4, se puede observar que para

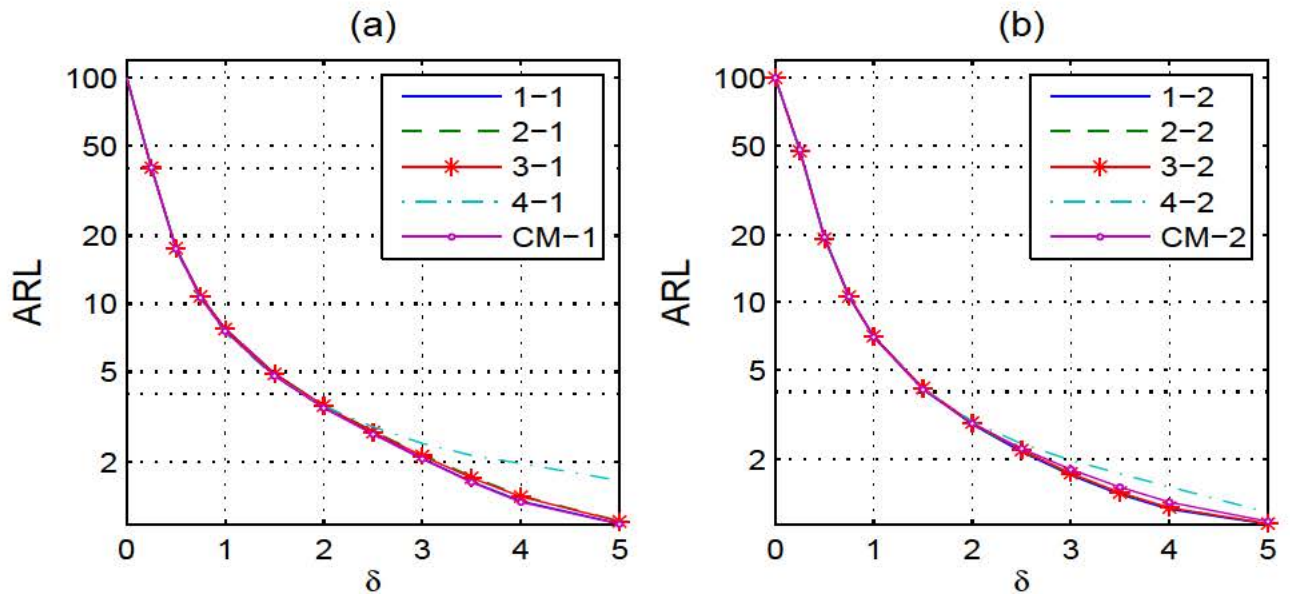


Figura 2.9: (a) Comparación del ARL de los primeros cuatro diseños AEWMA propuestos, AEWMA-(1-1, 2-1, 3-1, 4-1) y del AEWMA de CM-1. (b) Comparación del ARL de los segundos cuatro diseños AEWMA, AEWMA-(1-2, 2-2, 3-2, 4-2) y del AEWMA CM-2. $ARL_0 = 100$.

cambios pequeños y medianos, en el rango $(0, 1]$, todos los gráficos propuestos son mejores que CM-4. Para $\delta = 1.5$, el AEWMA2-2 y 3-2 son mejores que CM-4, siendo el AEWMA2-2 mejor incluso hasta $\delta = 2.5$. Para el resto de cambios, los gráficos propuestos son competitivos siendo CM-4 ligeramente mejor.

La última comparación es entre los gráficos de control AEWMA propuestos y dos gráficos de control ACUSUM de Jiang et al. (2008) (véase la Tabla 2.9). Los gráficos ACUSUM se han optimizado para la detección de cambios en la media en el rango $\delta \in [0.5, 4]$ (denotado aquí como ACUSUM J-1) y en el rango $\delta \in [1, 4]$ (denotado como ACUSUM J-2). Se puede observar que los gráficos AEWMA propuestos son muy competitivos para cambios pequeños, específicamente en el rango $(0, 0.75]$. En el cambio $\delta = 1$, los gráficos AEWMA1-1, 2-1 y 4-1 son los más competitivos, siendo el mejor el AEWMA4-1. Para $\delta = 1.5$, los gráficos AEWMA1-1 y 4-1 siguen siendo mejores que el resto, siendo el AEWMA4-1 el mejor. El AEWMA1-1 es mejor incluso hasta $\delta = 2$. En el intervalo $(2, 3]$, los gráficos propuestos tienen un buen comportamiento, siendo J-1 ligeramente más competitivo. Para cambios mayores, el AEWMA1-1 y 3-1 son los más eficientes, siendo el AEWMA3-1 el mejor. Por otra parte, se puede observar que los cuatro gráficos propuestos, AEWMA1-2, 2-2, 3-2 y 4-2 son los más competitivos en el rango de cambios $(0, 1]$, siendo el más competitivo el AEWMA4-2 hasta $\delta = 0.75$. Para $\delta = 1$, el AEWMA3-2 es ligeramente el mejor. El AEWMA1-2, 2-2 y 3-2 son los más competitivos en el rango $(1, 2]$, siendo el AEWMA2-2 el mejor. Para $\delta = 2.5$, el AEWMA1-2 y 2-2 son los más eficientes. Para cambios

Gráficos de control AEWMA con parámetro de suavizado variable en el tiempo

	δ										
	0.25	0.50	0.75	1.00	1.50	2.00	2.50	3.00	3.50	4.00	5.00
1-1	84.97	29.50	16.95	11.80	7.27	5.13	3.78	2.80	2.09	1.61	1.13
2-1	82.00	29.53	17.29	12.17	7.61	5.43	4.06	3.04	2.26	1.70	1.15
3-1	82.70	29.80	17.43	12.24	7.57	5.30	3.85	2.80	2.06	1.58	1.12
4-1	85.19	28.87	16.32	11.30	7.03	5.16	4.12	3.45	3.00	2.66	2.13
1-2	126.55	35.28	16.69	10.40	5.80	3.96	2.94	2.28	1.82	1.50	1.13
2-2	128.57	35.69	16.75	10.38	5.76	3.93	2.92	2.28	1.84	1.53	1.15
3-2	128.53	35.66	16.69	10.33	5.76	3.98	3.01	2.37	1.88	1.53	1.13
4-2	105.04	31.25	15.95	10.42	6.15	4.41	3.48	2.91	2.51	2.21	1.96
E-3	121.21	34.23	16.30	10.21	5.78	4.08	3.19	2.65	2.29	2.07	1.79
E-4	211.96	65.42	26.15	13.35	5.72	3.51	2.57	2.06	1.74	1.49	1.15
S-1	374.17	201.58	103.12	54.59	17.89	7.26	3.60	2.15	1.52	1.22	1.03
CM-3	86.41	29.91	17.11	11.88	7.27	5.06	3.65	2.64	1.92	1.47	1.08
CM-4	130.87	36.38	16.94	10.45	5.78	3.95	2.94	2.26	1.76	1.42	1.08
J-1	96.34	31.47	17.66	12.18	7.40	5.15	3.75	2.79	2.12	1.67	1.18
J-2	147.49	39.25	17.42	10.57	5.81	3.99	3.00	2.37	1.91	1.57	1.17

Tabla 2.9: Valores del ARL con $ARL_0 = 500$. Se consideran: AEWMA1-1 (1-1), AEWMA2-1 (2-1), AEWMA3-1 (3-1), AEWMA1-1 (4-1), AEWMA1-2 (1-2), AEWMA2-2 (2-2), AEWMA3-2 (3-2), AEWMA4-2 (4-2), EWMA3 (E-3), EWMA4 (E-4), Shewhart (S-2), AEWMA-CM-3 (CM-3), AEWMA-CM-4 (CM-4), ACUSUM-J-1 (J-1) y ACUSUM-J-2 (J-2).

mayores, los gráficos AEWMA1-2, 2-2 y 3-2 son los mejores. Las Figuras 2.10, 2.11, 2.12, 2.13 y 2.14 muestran las comparaciones realizadas.

2.7. Conclusiones

Se proponen cuatro gráficos de control adaptativos para el seguimiento de la media de una variable que representa una característica de calidad en un proceso particular. Estos gráficos de control trabajan con un parámetro de suavizado variable en el tiempo. Los gráficos AEWMA propuestos son fáciles de entender y aplicar en la práctica. Debemos tener en cuenta que el tamaño del cambio depende de la naturaleza del proceso supervisado. Dado que en la operación real, los cambios más pequeños son más frecuentes que los cambios más grandes, se ha valorado especialmente el estudio de los cambios pequeños y medianos en donde presentan muy buen comportamiento respecto del gráfico AEWMA de Capizzi y Masarotto (2003). Además, los gráficos propuestos son competitivos con respecto a otros gráficos alternativos propuestos en la literatura sobre un amplio rango de desajustes.

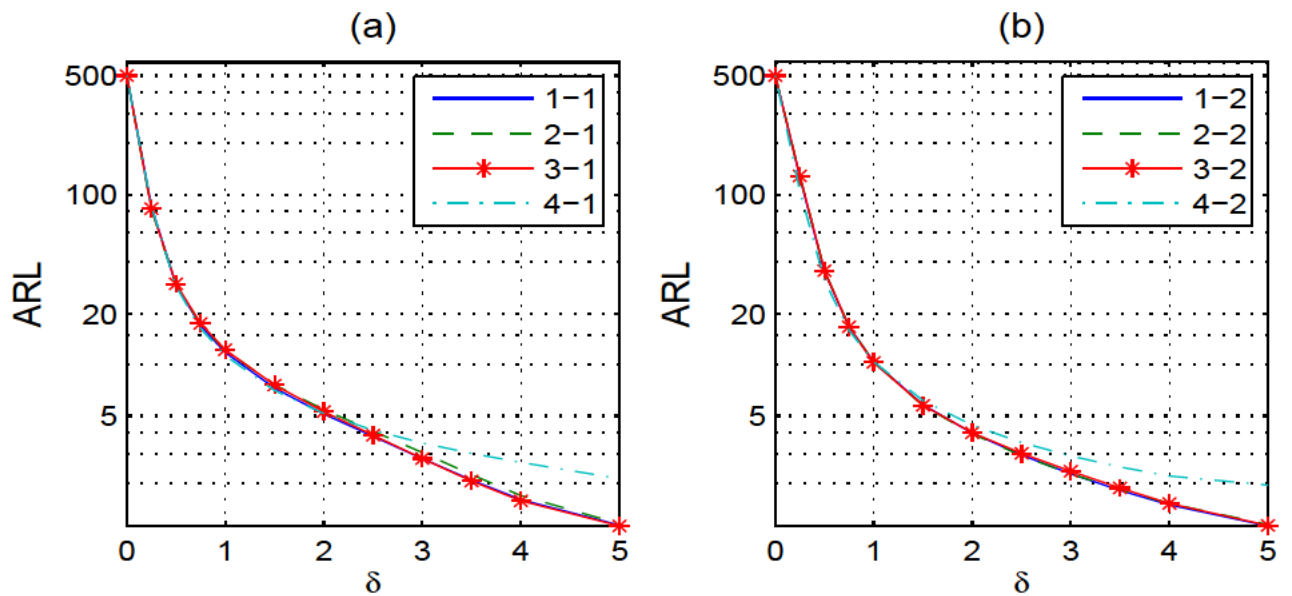


Figura 2.10: (a) Comparación del ARL de los primeros cuatro diseños AEWMA propuestos, AEWMA-(1-1, 2-1, 3-1, 4-1). (b) Comparación del ARL de los segundos cuatro diseños AEWMA, AEWMA-(1-2, 2-2, 3-2, 4-2). $ARL_0 = 500$.

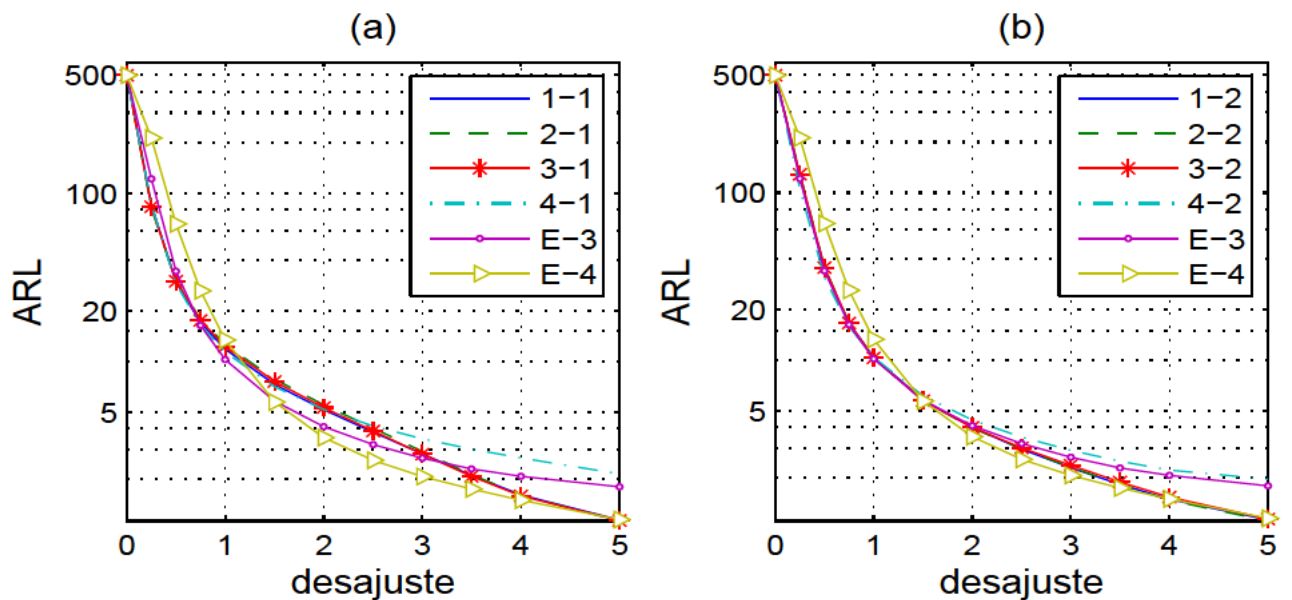


Figura 2.11: (a) Comparación del ARL de los primeros cuatro diseños AEWMA propuestos, AEWMA-(1-1, 2-1, 3-1, 4-1) y del EWMA (E-3, E-4). (b) Comparación del ARL de los segundos cuatro diseños AEWMA, AEWMA-(1-2, 2-2, 3-2, 4-2) y del EWMA (E-3, E-4). $ARL_0 = 500$.

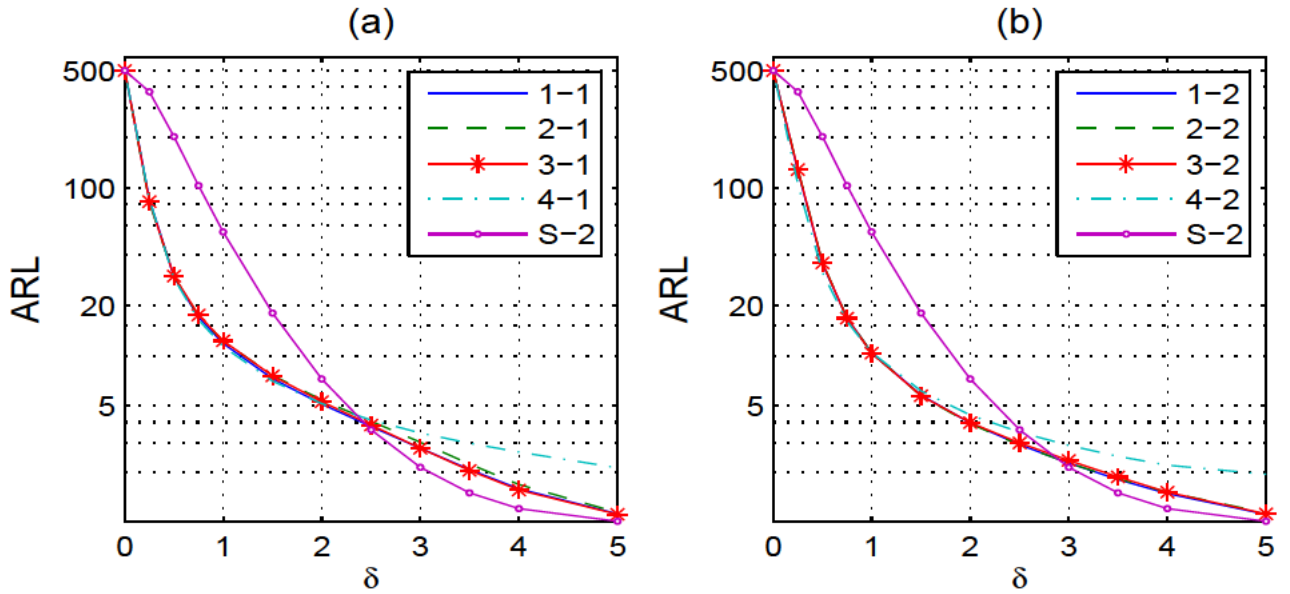


Figura 2.12: (a) Comparación del ARL de los primeros cuatro diseños AEWMA propuestos, AEWMA-(1-1, 2-1, 3-1, 4-1) y de Shewhart con $n = 1$ (S-2). (b) Comparación del ARL de los segundos cuatro diseños AEWMA, AEWMA-(1-2, 2-2, 3-2, 4-2) y de Shewhart con $n = 1$ (S-2). $ARL_0 = 500$.

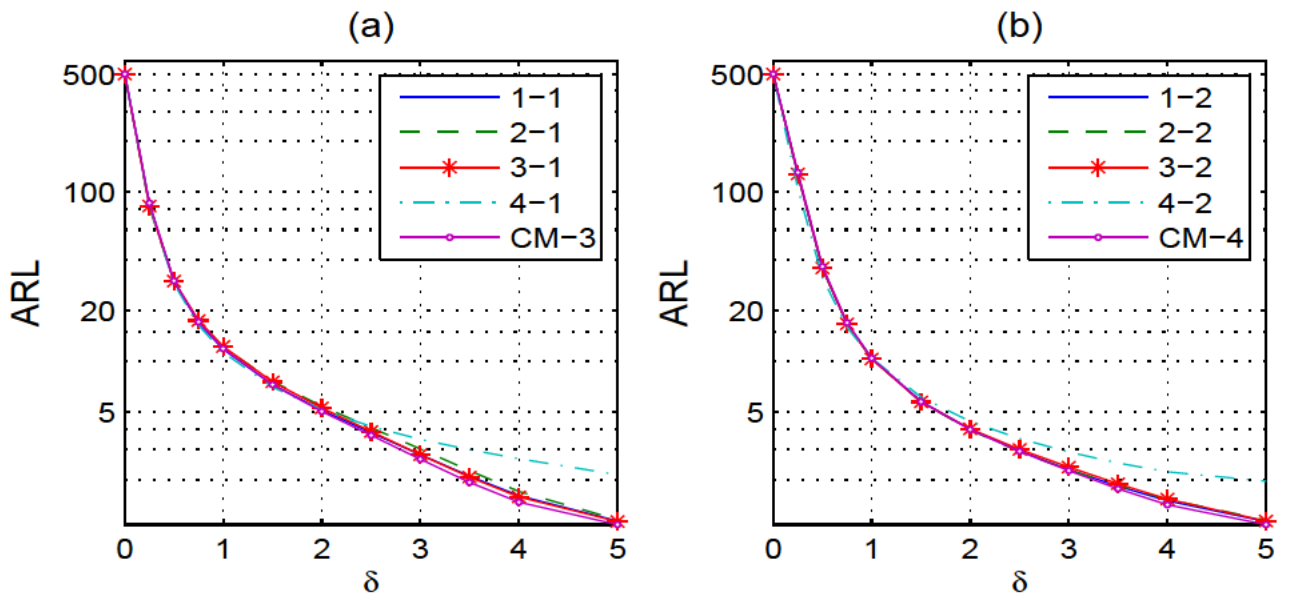


Figura 2.13: (a) Comparación del ARL de los primeros cuatro diseños AEWMA propuestos, AEWMA-(1-1, 2-1, 3-1, 4-1) y del AEWMA CM-3. (b) Comparación del ARL de los segundos cuatro diseños AEWMA, AEWMA-(1-2, 2-2, 3-2, 4-2) y del AEWMA CM-4. $ARL_0 = 500$.

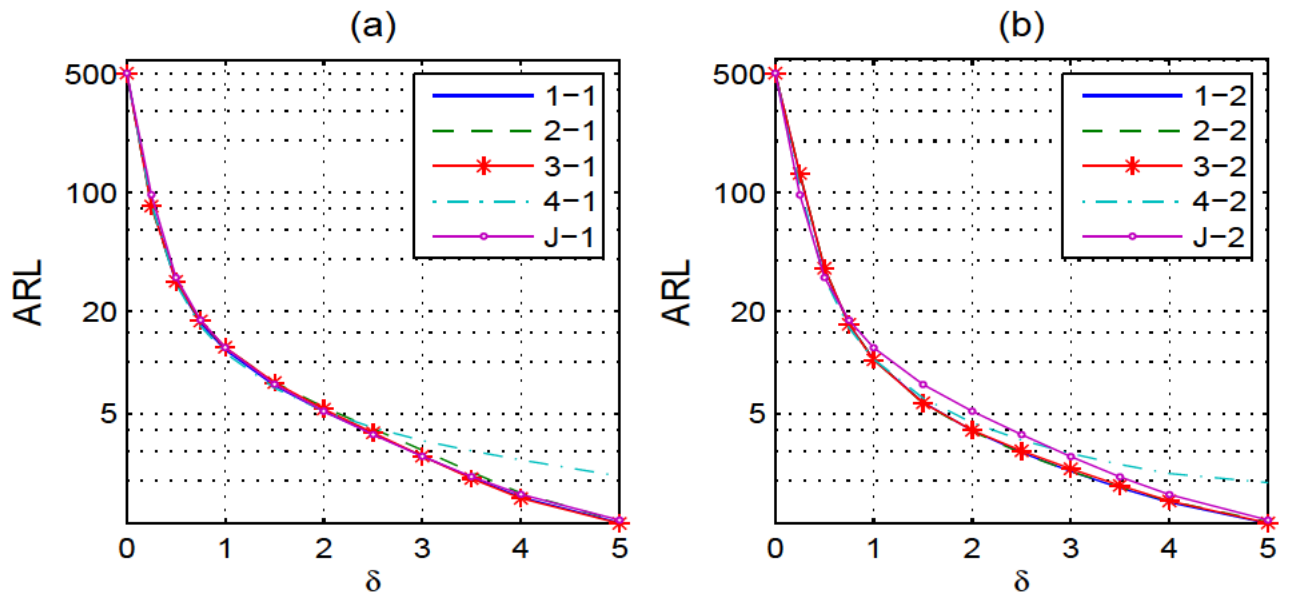


Figura 2.14: (a) Comparación del ARL de los primeros cuatro diseños AEWMA propuestos, AEWMA-(1-1, 2-1, 3-1, 4-1) y del ACUSUM J-1. (b) Comparación del ARL de los segundos cuatro diseños AEWMA, AEWMA-(1-2, 2-2, 3-2, 4-2) y del ACUSUM J-2. $ARL_0 = 500$.

Capítulo 3

Gráficos de control AEWMA-S² con parámetro de suavizado variable en el tiempo

3.1. Introducción

En esta parte del trabajo se extienden las ideas presentadas en el capítulo anterior, introduciendo algunos gráficos de control EWMA adaptativos para monitorizar la varianza de un proceso. En el desarrollo de este capítulo, se intentará ser autocontenidos pero con ciertas referencias al capítulo anterior. En lo que sigue, se asume que las observaciones $X_{t,i}$, $t = 1, 2, \dots$ e $i = 1, 2, \dots, n$ son independientes e idénticamente distribuidas $N(\mu_t, \sigma_t^2)$. Además, es de interés la detección de incrementos en la varianza del proceso, es decir, $\sigma_t^2 = \sigma_0^2$, para $t < t^*$ y $\sigma_t^2 > \sigma_0^2$, para $t \geq t^*$, siendo $\tau_t = \sigma_t/\sigma_0$. Sea S_t^2 la varianza del t -ésimo subgrupo racional de tamaño n definido por $S_t^2 = (1/(n-1)) \sum_{i=1}^n (X_{t,i} - \bar{X}_t)^2$, donde $X_{t,i}$ es la i -ésima observación del t -ésimo subgrupo racional y \bar{X}_t es la media de dicho subgrupo. Por lo tanto, Crowder y Hamilton (1992) sugieren el gráfico de control EWMA para el seguimiento de los incrementos en la varianza del proceso con el estadístico,

$$y_t = \max[0, \lambda M_t + (1 - \lambda) y_{t-1}], \quad y_0 = 0, \quad (3.1)$$

donde $M_t = \ln(S_t^2/\sigma_0^2)$, la cual es aproximadamente distribuida normal. La media y la varianza de la variable transformada M_t son aproximadas por (1.48), es decir

$$\mu_M = \ln(\tau_t^2) - \frac{1}{n-1} - \frac{1}{3(n-1)^2} + \frac{2}{15(n-1)^4}, \quad (3.2)$$

y

$$\sigma_M^2 = \frac{2}{n-1} + \frac{2}{(n-1)^2} + \frac{4}{3(n-1)^3} - \frac{16}{15(n-1)^5}, \quad (3.3)$$

respectivamente. Es importante notar que $\sigma_{M_t}^2$ sólo depende de n , es por eso que M_t se puede monitorizar como X_t en el gráfico de control EWMA para monitorizar la media de un proceso. Este gráfico da una señal cuando,

$$y_t > h, \quad (3.4)$$

donde h es un umbral que depende del ARL_0 deseado.

Para diseñar un gráfico de control EWMA para el seguimiento de la varianza de un proceso (EWMA-S²), los valores de los parámetros λ y h para un subgrupo racional de tamaño n deben ser seleccionados adecuadamente. Los parámetros λ y h , los cuales se presentan en (3.1) y (3.4), pueden ser elegidos de tal manera que el gráfico sea óptimo en la detección de un cambio previamente especificado en la varianza del proceso, dada una longitud promedio de rachas en el proceso bajo control (ARL_0). La influencia de los parámetros de diseño en el rendimiento del EWMA-S² ha sido estudiado por Box, Hunter y Hunter (1978), Crowder y Hamilton (1992), Castagliola (2005), Shu y Jiang (2008), Castagliola et al. (2010), Huwang et al. (2010), Abbasi (2010), entre otros.

El ARL del gráfico de control AEWMA-S² es una función del cambio, $\tau = \sigma_1/\sigma_0$ (σ_0 es la desviación estándar del proceso bajo control y σ_1 es la desviación estándar del proceso fuera de control), λ , h y n ; es decir, el ARL se puede escribir como $ARL_\tau = ARL(\lambda, h|\tau, n)$. Entonces, resolviendo el siguiente problema de optimización, se pueden encontrar los valores de los parámetros λ y h que minimizan el $ARL(\lambda, h|\tau, n)$:

$$\begin{aligned} & \min_{\lambda, h} ARL(\lambda, h|\tau, n) \\ & \text{sujeto a:} \\ & ARL(\lambda, h|\tau = 1, n) = ARL_0, \end{aligned}$$

donde, dependiendo de la propuesta de EWMA-S², el $ARL(\lambda, h|\tau \neq 1, n)$ se puede aproximar aplicando procedimientos de cadenas de Markov.

Mientras que un gráfico EWMA-S² óptimo necesita de un valor de λ diferente para un determinado cambio τ , el mismo valor de λ puede ser una opción razonable para algún rango de cambios. Sin embargo, no hay un único valor de λ que permita obtener un gráfico de control EWMA casi óptimo u óptimo para cambios tanto pequeños como grandes. Para ilustrar este hecho, se han obtenido los diseños óptimos por cada cambio τ , $ARL_0 = 200$ and $n = 5$, usando la propuesta de Crowder y Hamilton (1992) con la transformación $\ln(S^2/\sigma_0^2)$. El λ óptimo es denotado por λ^* y el mínimo ARL es denotado por ARL^* . La Figura 3.1-a muestra la comparación entre el diseño

3.1 Introducción

óptimo para el ARL^* y el rango de diseños con $ARL \leq ARL^* + 10\%$ o $ARL \leq 1.1 \times ARL^*$. Es decir, se ha encontrado el diseño óptimo para cada cambio así como aquellos diseños que son cercanos al óptimo en el sentido que sus valores de ARL en cada cambio no son más grandes que un 10 % del valor mínimo (ARL^*).

La Tabla 3.1 muestra que, por ejemplo, si $\tau = 1.3$ entonces es posible obtener un $ARL \in [10.52, 11.57]$ para un $\lambda \in [0.005, 0.5703]$. La Figura (3.1-b) muestra el rango $[\lambda_1, \lambda_2]$ de λ para el cual el valor del ARL varía en el rango $[ARL^*, 1.1 \times ARL^*]$. Por ejemplo, si $\lambda = 0.15$, es posible obtener valores aceptables de ARL (con una diferencia menor que el 10 % del ARL^*) para cambios pequeños de $\tau \approx 1.1$ a 1.5. Si $\lambda = 0.7$, entonces es posible conseguir valores aceptables de ARL para $\tau \geq 1.4$. Cuando el cambio es pequeño, por ejemplo, $\tau \in (1, 1.4]$, se puede notar que las diferencias entre el ARL^* y $1.1 \times ARL^*$ son notables y por lo tanto la variación de λ tiene mayor influencia en el ARL . Por el contrario, para $\tau \geq 1.5$, la influencia de la variación de λ en el ARL es pequeña. Es importante notar que los valores de ARL o las diferencias del ARL se incrementarían si se usa como medida del comportamiento el número promedio de observaciones hasta la señal ($ANOS$) ya que $ANOS = n \times ARL$.

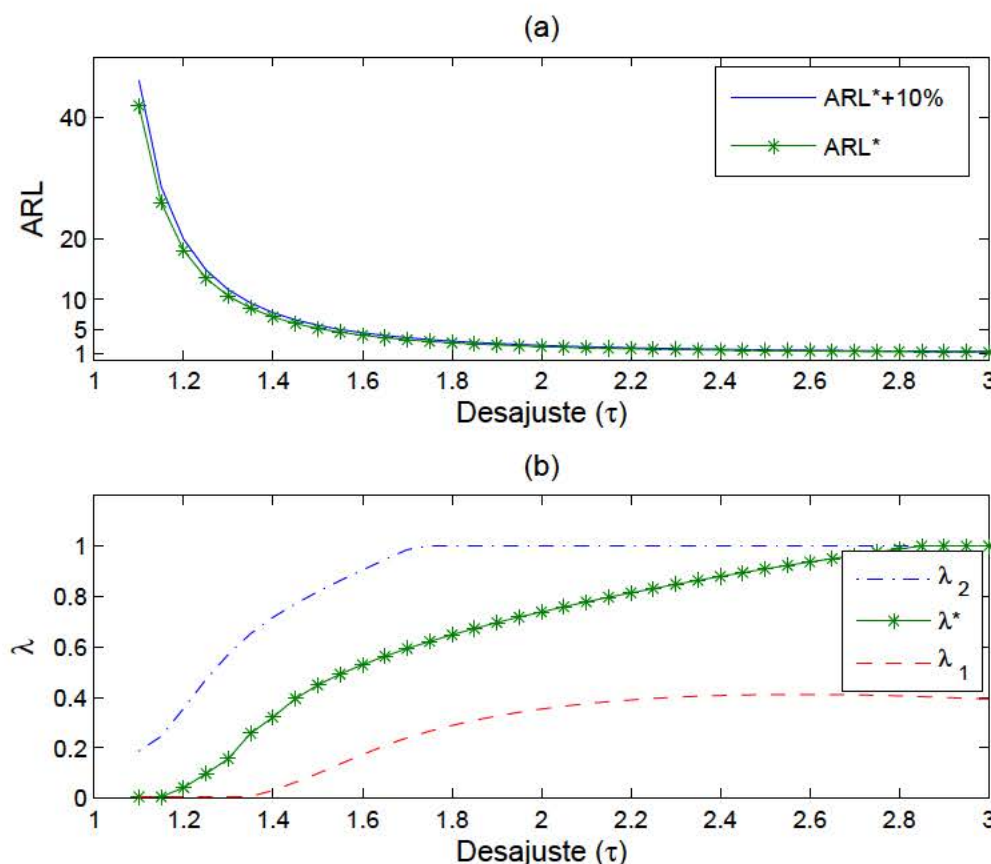


Figura 3.1: (a) Comparación entre los ARL^* (---) y $ARL^* + 10\% \times ARL^*$ (—). (b) Comportamiento de λ^* (---), y un rango de variación definida por λ_1 (---) y λ_2 (---).

τ	λ^*	ARL*	1.1ARL*	$[\lambda_1, \lambda_2]$
1.1	0.005	41.98	46.18	[0.005, 0.187]
1.2	0.042	18.09	19.90	[0.005, 0.356]
1.3	0.157	10.52	11.57	[0.005, 0.570]
1.4	0.321	7.08	7.78	[0.030, 0.717]
1.5	0.449	5.18	5.70	[0.098, 0.819]
1.6	0.529	4.04	4.45	[0.173, 0.905]
1.7	0.593	3.31	3.64	[0.239, 0.986]
1.8	0.648	2.80	3.08	[0.289, 1.000]
1.9	0.696	2.44	2.69	[0.326, 1.000]
2.0	0.739	2.17	2.39	[0.354, 1.000]
2.1	0.778	1.97	2.17	[0.374, 1.000]
2.2	0.814	1.81	1.99	[0.389, 1.000]
2.3	0.848	1.68	1.85	[0.400, 1.000]
2.4	0.879	1.58	1.74	[0.407, 1.000]
2.5	0.909	1.50	1.65	[0.411, 1.000]
2.6	0.937	1.43	1.57	[0.411, 1.000]
2.7	0.963	1.37	1.51	[0.409, 1.000]
2.8	0.988	1.32	1.46	[0.405, 1.000]
2.9	1.000	1.28	1.41	[0.399, 1.000]
3.0	1.000	1.25	1.38	[0.392, 1.000]

Tabla 3.1: Valores mínimos de ARL para cada cambio τ y el correspondiente λ .

Como conclusión, si queremos un EWMA-S² con un buen comportamiento para todos los cambios posibles, es necesario usar un λ variable en el tiempo, es decir $\lambda = \lambda_t$. Los resultados presentados arriba sugieren que λ_t debe depender del cambio. Pero, generalmente, en situaciones reales el cambio es desconocido por lo que es necesario encontrar medidas de la evidencia del cambio basadas en los datos. Dichas medidas serán traducidas en un valor apropiado de λ_t . Si los datos sugieren que la varianza del proceso podría estar cambiando, el valor de λ_t aumentaría para permitir que y_t se acerque más a la nueva varianza, situación que facilitaría la señal de alarma. Por el contrario, si los datos muestran una baja evidencia de ser cambiantes, el parámetro λ_t se mantendría en un valor más bajo, para permitir la detección de un posible cambio pequeño.

En este sentido, Capizzi y Masarotto (2003) proponen un gráfico de control EWMA adaptativo (AEWMA) basado en el comportamiento de los datos para el seguimiento de la media del proceso. Más tarde y apoyándose en los trabajos de Crowder y Hamilton (1992) y Capizzi y Masarotto (2003), Shu (2008) presenta un gráfico EWMA adaptativo para el seguimiento de los incrementos en la varianza del proceso (AEWMA-S²) el cual considera el siguiente estadístico

$$y_t = \max[0, y_{t-1} + \phi(e_t)], \quad y_0 = 0, \quad (3.5)$$

donde, $e_t = M_t - y_{t-1}$, M_t se presenta en (3.1) y $\phi(e_t)$ es la función de puntuación (score function)

3.2 Gráficos de control AEWMA-S² con λ_t basado en M_t

basada en la función de Huber (Huber, 1981) ,

$$\phi(e) = \begin{cases} e + (1 - \lambda) \gamma & \text{si } e < -\gamma \\ \lambda e & \text{si } |e| \leq \gamma \\ e - (1 - \lambda) \gamma & \text{si } e > \gamma \end{cases} , \quad (3.6)$$

donde, γ es un parámetro adicional del gráfico. En efecto, se emite una señal de cambio hacia arriba cuando $y_t > h$, donde h es un umbral que determina el ARL_0 . Se puede seguir un procedimiento similar si estamos interesados en el seguimiento de la disminución de la varianza del proceso.

Al igual que en el capítulo anterior, se procederá a analizar estrategias alternativas para conseguir gráficos de control AEWMA-S² con parámetros de suavizado variables en el tiempo para el seguimiento de los aumentos de la varianza del proceso utilizando el estadístico,

$$y_t = \max[0, \lambda_t M_t + (1 - \lambda_t) y_{t-1}] , \quad y_0 = 0, \quad (3.7)$$

donde, M_t es la misma variable aleatoria presentada en (3.1).

El resto de este capítulo se organiza de la siguiente manera. En la Sección 3.2 se presentan diversas alternativas de gráficos de control AEWMA-S². En este sentido, se sugieren medidas del potencial cambio en el proceso basadas en el valor de la última observación. Para cada medida del potencial cambio, se discuten métodos alternativos para traducir dicha medida en un factor o parámetro de suavizado variable en el tiempo. En la Sección 3.3 se exponen procedimientos para calcular el ARL basados en aproximaciones con cadenas de Markov para cada propuesta así como procedimientos de optimización para encontrar sus diseños óptimos. En la Sección 3.4 se propone un gráfico de control EWMA-S² adaptativo cuya medida del potencial desajuste en el proceso se basa en el valor del estadístico previo. Posteriormente, se presenta una forma de traducir dicha medida en un parámetro de suavizado variable en el tiempo. En la Sección 3.5, de una forma análoga a lo presentado en la Sección 3.3, se introduce un procedimiento para calcular el ARL y optimizar el gráfico. En la Sección 3.6 se presentan algunas comparaciones numéricas de estos procedimientos adaptativos con las principales alternativas en la literatura. Finalmente, en la Sección 3.7 se proporcionan algunas conclusiones.

3.2. Gráficos de control AEWMA-S² con λ_t basado en M_t

En esta sección, se presentan algunas propuestas para medir la evidencia del cambio basadas en la variable M_t . La primera propuesta, denotada como gráfico de control AEWMA1-S², se basa en la distancia normalizada de M_t a la media μ_{M0} . La segunda propuesta, que se denota como AEWMA2-S², se basa en la distancia normalizada de M_t al valor del estadístico de seguimiento

previo, y_{t-1} . Y finalmente, la tercera propuesta es una combinación de las propuestas anteriores la cual se denota como AEWMA3-S². Luego, se obtienen parámetros de suavizado λ_t a partir de una adecuada transformación de cada una de las tres distancias.

3.2.1. Gráfico de control AEWMA1-S²

Este gráfico adaptativo usa el siguiente estadístico,

$$T_{1t} = \left(\frac{M_t - \mu_{M0}}{\sigma_M} \right)^2, \quad (3.8)$$

como una medida de la evidencia del cambio. Notar que T_{1t} es la distancia estandarizada de la última variable M_t a la media μ_{M0} , la cual tiende a ser grande en presencia de un cambio en la varianza del proceso. Dicho estadístico es análogo al presentado en el Capítulo anterior, con las diferencias que los términos μ_{M0} y σ_M se obtienen de las expresiones (3.2) y (3.3) cuando $\tau = 1$. Por lo que, dado el valor de y_{t-1} , M_t es una variable aleatoria que se distribuye aproximadamente normal (Shu y Jiang, 2008). Por lo tanto, en un proceso bajo control, se espera que T_{1t} siga aproximadamente una distribución chi-cuadrada centrada de un grado de libertad, χ_1^2 . La función de distribución acumulada se define como,

$$F_{1t} = \Pr(\chi_1^2 \leq T_{1t}). \quad (3.9)$$

A pesar de que F_{1t} puede ser una elección natural para λ_t ya que $F_{1t} \in [0, 1]$ y es una función creciente en T_{1t} , Sánchez (2006) ha demostrado que la variabilidad de F_{1t} puede ser muy grande, provocando una gran varianza en el estadístico de monitorización y_t , que a su vez puede producir pérdidas de sensibilidad en la detección de cambios. Por tal motivo se ha visto adecuado introducir algún tipo de transformación que traduzca F_{1t} en un parámetro de suavizado λ_t . En el Capítulo 2, se han explorado las siguientes transformaciones:

- Transformación lineal acotada

$$\lambda_{1t}^{(1)} = \lambda_{\min} + (\lambda_{\max} - \lambda_{\min}) F_{1t}, \quad (3.10)$$

donde λ_{\min} y λ_{\max} son parámetros que se optimizan con el fin de lograr el mínimo ARL bajo un ARL_0 deseado y se calculan según el procedimiento descrito en la Sección 3.4.

- Transformación con potencia

$$\lambda_{1t}^{(2)} = \lambda_{\min} + (\lambda_{\max} - \lambda_{\min}) F_{1t}^a, \quad (3.11)$$

3.2 Gráficos de control AEWMA-S² con λ_t basado en M_t

donde a es otro parámetro que se debe optimizar junto con λ_{\min} y λ_{\max} .

■ Transformación con umbral

$$\lambda_{1t}^{(3)} = \lambda_{\min} + (\lambda_{\max} - \lambda_{\min}) q_{1t},$$

$$q_{1t} = \begin{cases} 0 & \text{si } F_{1t}^a \leq p_0, \\ \frac{F_{1t}^a - p_0}{1 - p_0} & \text{en otro caso,} \end{cases}, \quad (3.12)$$

donde el umbral p_0 es un parámetro constante que es optimizado junto con a , λ_{\min} , y λ_{\max} .

Se puede notar que $\lambda_t = \lambda_{\min}$ cuando F_{1t}^a es menor que el umbral predefinido, p_0 . En consecuencia, se mantendrá un valor bajo del parámetro de suavizado a menos que la evidencia del cambio sea grande. Si $F_{1t}^a > p_0$, se mantiene una transformación similar como en (3.11) de tal manera que toda la transformación sea continua. Por otra parte, la transformación con potencia es un caso particular de la transformación con umbral cuando $p_0 = 0$ y análogamente, la transformación lineal acotada es un caso particular de la transformación de potencia cuando $a = 1$. La Figura 3.2 muestra dos ejemplos de cómo el valor M_t se traduce en un parámetro de suavizado λ_t , con $\lambda_t = \lambda_{1t}^{(3)}$ en (3.12) para un diseño de AEWMA1-S² particular. Sin pérdida de generalidad, en esta Figura 3.2 y en las Figuras 3.3, 3.4 y 3.5, se asume que $X_t \sim N(0, 1)$.

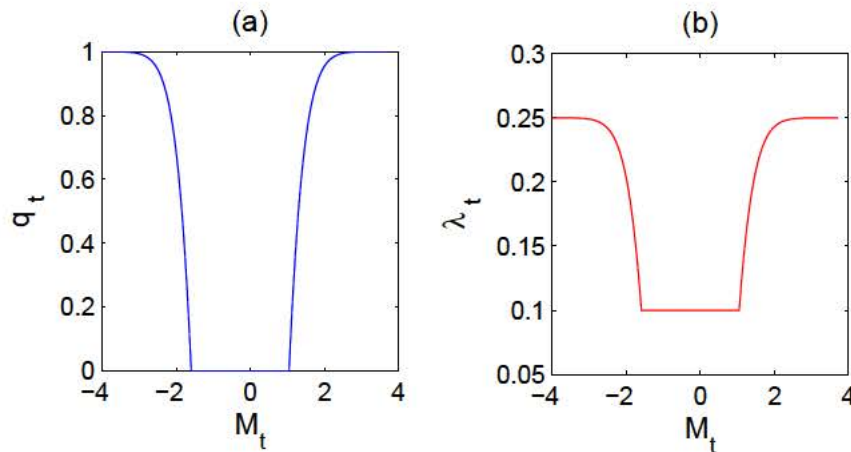


Figura 3.2: (a) Comportamiento de q_t en función de M_t . (b) Comportamiento de λ_t en función de M_t . Considerando un conjunto específico de parámetros (PS), PS1: $\lambda_{\min} = 0.1$, $\lambda_{\max} = 0.25$, $a = 1$, $p_0 = 0.9$, y $h = 0.3031$.

3.2.2. Gráfico de control AEWMA2-S²

Este gráfico adaptativo usa el siguiente estadístico

$$T_{2t} = \left(\frac{M_t - y_{t-1}}{\sigma_M} \right)^2, \quad (3.13)$$

como una medida de la evidencia del cambio en la varianza del proceso. Notar que T_{2t} es la diferencia entre el valor actual de M_t y el valor del estadístico AEWMA en el tiempo anterior, y_{t-1} y aumenta en presencia de un incremento en la varianza. Ahora bien, asumiendo que M_t se distribuye aproximadamente normal (Shu y Jiang, 2008), el estadístico conduce a la siguiente expresión:

$$T_{2t} = \left(\frac{M_t - \mu_{M0}}{\sigma_M} + \frac{\mu_{M0} - y_{t-1}}{\sigma_M} \right)^2 = \left(z_t + \frac{\mu_{M0} - y_{t-1}}{\sigma_M} \right)^2, \quad (3.14)$$

donde z_t es aproximadamente una variable normal estándar. Por lo tanto, dado el valor del estadístico previo, y_{t-1} , T_{2t} sigue una distribución aproximada chi-cuadrada no centrada con un grado de libertad, $\chi_1^2(\gamma_t)$, con el parámetro de no centralidad $\gamma_t = (\mu_{M0} - y_{t-1}) / \sigma_M$. Como se puede ver en el Capítulo 2, el parámetro de suavizado, γ_t , puede despreciarse para fines prácticos. Por lo que, en aras de la simplicidad, la conversión de T_{2t} en un parámetro de suavizado se obtiene como sigue,

$$\begin{aligned} \lambda_{2t} &= \lambda_{\min} + (\lambda_{\max} - \lambda_{\min}) q_{2t}, \\ q_{2t} &= \begin{cases} 0 & \text{si } G_{2t}^a \leq p_0, \\ \frac{G_{2t}^a - p_0}{1 - p_0} & \text{en otro caso,} \end{cases} \\ G_{2t} &= P(\chi_1^2 \leq T_{2t}), \end{aligned} \quad (3.15)$$

donde los parámetros λ_{\min} , λ_{\max} , p_0 , y a , son optimizados para minimizar el ARL cuando el proceso está fuera de control, para un ARL_0 dado, usando el procedimiento mostrado en la Sección 3.4. La Figura 3.3 ilustra cómo λ_{2t} varía en función de M_t , con dos conjuntos de parámetros específicos. Debido a que el estadístico T_{2t} depende de y_{t-1} , se presentan dos curvas con dos valores diferentes de y_{t-1} .

3.2.3. Gráfico de control AEWMA3-S²

Este gráfico es una combinación de los gráficos AEWMA1-S² y AEWMA2-S² en el sentido que se considera el estadístico T_{1t} o el estadístico T_{2t} , dependiendo de cuál es el más pesimista con respecto a la evidencia del cambio, es decir, $T_{3t} = \max(T_{1t}, T_{2t})$. En consecuencia, el gráfico

3.3 Cálculo del ARL usando el enfoque de cadenas de Markov

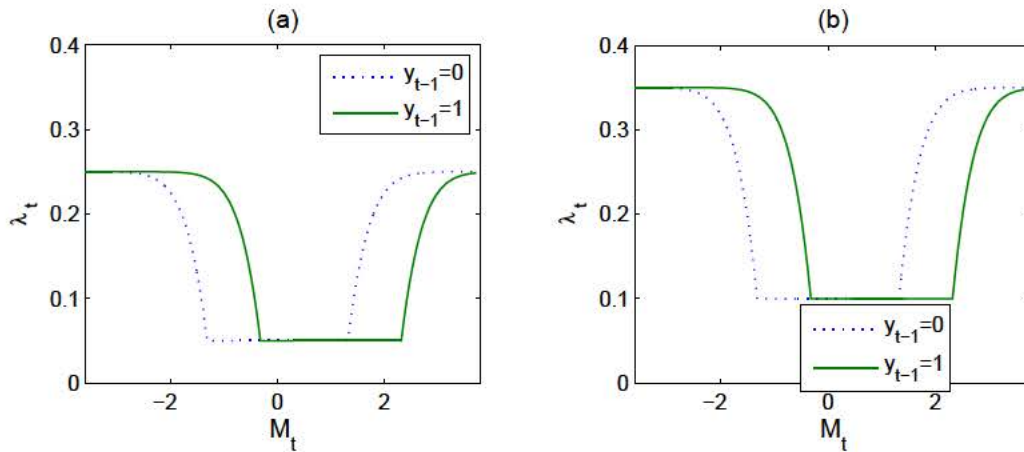


Figura 3.3: (a) Comportamiento de λ_t en función de M_t con $y_{t-1} = 0$ (\cdots) y $y_{t-1} = 1$ ($—$) para el gráfico AEWMA2-S² con PS2: $\lambda_{\min} = 0.05$, $\lambda_{\max} = 0.25$, $a = 1$, $p_0 = 0.9$, $h = 0.1503$. (b) Comportamiento de λ_t en función de M_t con $y_{t-1} = 0$ (\cdots) y $y_{t-1} = 1$ ($—$) para el gráfico AEWMA2-S² con PS3: $\lambda_{\min} = 0.1$, $\lambda_{\max} = 0.35$, $a = 1$, $p_0 = 0.9$ y $h = 0.2572$.

AEWMA3-S² usa el parámetro de suavizado variable en el tiempo siguiente,

$$\lambda_{3t} = \max(\lambda_{1t}^{(3)}, \lambda_{2t}), \quad (3.16)$$

el cual corresponde a usar el estadístico T_{3t} en la transformación (3.15). La Figura 3.4 ilustra cómo λ_{3t} varía en función de M_t , con dos conjuntos de parámetros específicos. Se debe tener en cuenta que se está usando un mismo conjunto de parámetros para ambos factores de suavizado, $\lambda_{1t}^{(3)}$ y λ_{2t} . Puesto que el estadístico T_{3t} también depende de y_{t-1} , se presentan dos curvas con dos valores diferentes de y_{t-1} .

3.3. Cálculo del ARL usando el enfoque de cadenas de Markov

Esta sección muestra un procedimiento para calcular el ARL de los gráficos AEWMA1-S², AEWMA2-S², y AEWMA3-S² usando el enfoque de cadenas de Markov. Siguiendo la idea de Brook y Evans (1972), Lucas y Saccucci (1990), Capizzi y Masarotto (2003) o Shu (2008), se puede aproximar el valor del ARL discretizando la matriz de probabilidad de transición de estado infinito de la cadena de Markov de estado continuo definido por (3.7). Por conveniencia, se reescribirá el estadístico de control del AEWMA-S² como,

$$y_t = \max[0, y_{t-1} + (M_t - y_{t-1}) \lambda_t]. \quad (3.17)$$

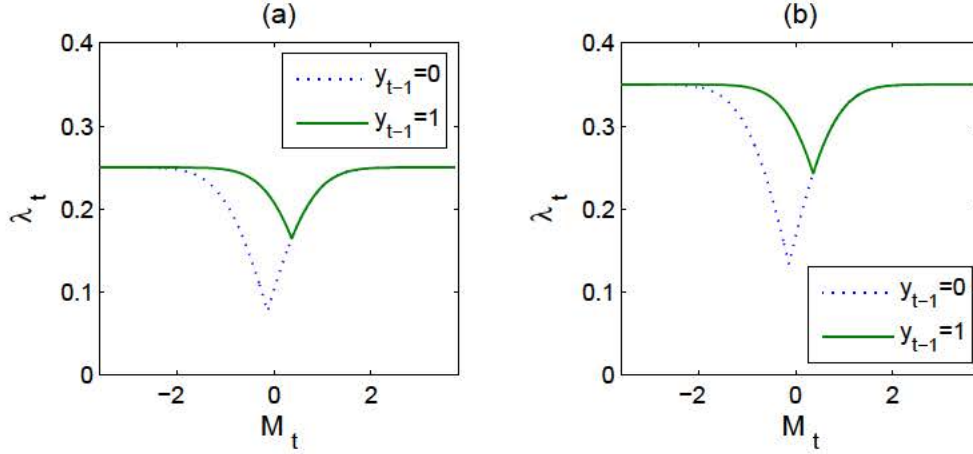


Figura 3.4: (a) Comportamiento de λ_t en función de M_t con $y_{t-1} = 0$ (\cdots) y $y_{t-1} = 1$ ($—$) para el gráfico AEWMA3-S² con PS4: $\lambda_{\min} = 0.1$, $\lambda_{\max} = 0.25$, $a = 1$, $p_0 = 0.9$ y $h = 0.3023$. (b) Comportamiento de λ_t en función de M_t con $y_{t-1} = 0$ (\cdots) y $y_{t-1} = 1$ ($—$) para el gráfico AEWMA3-S² con PS5: $\lambda_{\min} = 0.15$, $\lambda_{\max} = 0.3$, $a = 1$, $p_0 = 0.9$ y $h = 0.3855$.

El procedimiento consiste en dividir el intervalo $[0, h]$ en un número impar m de subintervalos Ω_j , $j = 1, 2, \dots, m$. Estos subintervalos tienen una amplitud de $\omega = (2h) / (2m - 1)$, excepto el primer subintervalo el cual tiene una amplitud de $\omega/2$. Cada subintervalo Ω_j , que representa el j -ésimo estado, tiene como punto medio $\nu_j = (j - 1)\omega$. El estadístico de control y_t se considera que está en el estado transitorio o en el subintervalo Ω_j en el tiempo t , si $\nu_j - \omega/2 < y_t < \nu_j + \omega/2$. Además, y_t cae en un estado absorbente cuando excede el umbral h . Sea $r_{j,k}$ la probabilidad de transición de y_t de ir del estado j al estado k , entonces, para $j = 1, 2, 3, \dots, m$ y $k \neq 1$,

$$r_{j,k} = \Pr[y_t \in \Omega_k \mid y_{t-1} \in \Omega_j] \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} &= \Pr[v_k - \omega/2 < y_t \leq v_k + \omega/2 \mid y_{t-1} = v_j] \\ &= \Pr[(k - 1)\omega - \omega/2 < v_j + (M_t - v_j)\lambda_t \leq (k - 1)\omega + \omega/2] \\ &= \Pr[(k - 1)\omega - \omega/2 - (j - 1)\omega < (M_t - v_j)\lambda_t \leq (k - 1)\omega + \omega/2 - (j - 1)\omega] \\ &= \Pr[(k - j - 1/2)\omega < (M_t - v_j)\lambda_t \leq (k - j + 1/2)\omega]. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Denotemos $a_1 = (k - j - 1/2)\omega$ y $a_2 = (k - j + 1/2)\omega$. Entonces,

$$\begin{aligned} r_{j,k} &= \Pr[\exp(a_1) < \exp[\lambda_t(M_t - v_j)] \leq \exp(a_2)] \\ &= \Pr\left[\exp(a_1) < \frac{\exp(\lambda_t M_t)}{\exp(\lambda_t v_j)} \leq \exp(a_2)\right]. \end{aligned} \quad (3.20)$$

3.3 Cálculo del ARL usando el enfoque de cadenas de Markov

Notar que cuando $k = 1$

$$r_{j,k} = \Pr \left[\frac{\exp(\lambda_t M_t)}{\exp(\lambda_t v_j)} \leq \exp(a_2) \right].$$

Reemplazando $M_t = \ln(S_t^2/\sigma_0^2)$ en (3.20),

$$\begin{aligned} r_{j,k} &= \Pr \left[\exp(a_1) < \frac{\exp[\lambda_t \ln(S_t^2/\sigma_0^2)]}{\exp(\lambda_t v_j)} \leq \exp(a_2) \right] \\ &= \Pr \left[\exp(a_1) < \frac{(S_t^2/\sigma_0^2)^{\lambda_t}}{\exp(\lambda_t v_j)} \leq \exp(a_2) \right]. \end{aligned} \quad (3.21)$$

La expresión $(S_t^2/\sigma_0^2)^{\lambda_t} / e^{\lambda_t v_j}$ de (3.21) no tiene una distribución trivial ya que λ_t depende de (S_t^2/σ_0^2) como en (3.12), (3.15) o (3.16). Por lo tanto, se puede proponer una aproximación de su distribución. En este sentido, se sabe que $S_t^2/\sigma_0^2 \sim \Gamma((n-1)/2, 2\sigma^2/[(n-1)\sigma_0^2])$. Sea σ_S la desviación estándar de la variable aleatoria S_t^2/σ_0^2 , es decir,

$$\sigma_S = \left([(n-1)/2] (2\sigma^2/[(n-1)\sigma_0^2])^2 \right)^{1/2}. \quad (3.22)$$

Basado en (3.22), se define un intervalo de probabilidad adecuado para S_t^2/σ_0^2 , por ejemplo, $(0, 7\sigma_S]$, ya que la probabilidad de caer después de $7\sigma_S$ es aproximadamente cero. El mencionado intervalo también se puede discretizar en m subintervalos Ψ_i , $i = 1, 2, 3, \dots, m$. De la misma forma a la discretización previa, se define la amplitud del subintervalo como $\varepsilon = 7\sigma_S/(2m-1)$ y el punto medio del i -ésimo subintervalo Ψ_i como u_i . Si $S_t^2/\sigma_0^2 \in \Psi_i$ entonces $u_i - \varepsilon/2 < S_t^2/\sigma_0^2 \leq u_i + \varepsilon/2$. En cada uno de los subintervalos, se aproxima S_t^2/σ_0^2 al valor de u_i . Los valores aproximados para S_t^2/σ_0^2 se usan para asignar un valor aproximado de M_t y λ_t en cada subintervalo como,

$$T_{1t} \approx \left(\frac{\ln u_i - \mu_{M0}}{\sigma_M} \right)^2 \equiv c_i \text{ o } T_{2t} \approx \left(\frac{\ln u_i - v_j}{\sigma_M} \right)^2 \equiv c_i \text{ o } T_{3t} \approx \max(T_{1t}, T_{2t}) \equiv c_i$$

$$\begin{aligned} r_i &= \Pr(\chi_1^2 < c_i) \\ q_i &= \begin{cases} 0 & \text{si } r_i^a \leq p_0, \\ \frac{r_i^a - p_0}{1 - p_0} & \text{en otro caso,} \end{cases} \\ \lambda_i &= \lambda_{\min} + (\lambda_{\max} - \lambda_{\min}) q_i. \end{aligned}$$

En consecuencia, si se desea aproximar los valores de $r_{j,k}$ en (3.18), se puede condicionar en

cada subintervalo Ψ_i y aplicar el teorema de la probabilidad total como,

$$\begin{aligned}
 r_{j,k} &= \Pr \left[\exp(a_1) \leq \frac{(S_t^2/\sigma_0^2)^{\lambda_t}}{\exp(\lambda_t v_j)} \leq \exp(a_2) \right] \\
 &= \sum_{i=1}^m \Pr \left[\exp(a_1) \leq \frac{(S_t^2/\sigma_0^2)^{\lambda_t}}{\exp(\lambda_t v_j)} \leq \exp(a_2) \mid S_t^2/\sigma_0^2 \in \Psi_i \right] \Pr[S_t^2/\sigma_0^2 \in \Psi_i] \\
 &\approx \sum_{i=1}^m \Pr \left[\exp(a_1) \leq \frac{(u_i)^{\lambda_i}}{\exp(\lambda_i v_j)} \leq \exp(a_2) \right] \Pr[S_t^2/\sigma_0^2 \in \Psi_i]. \tag{3.23}
 \end{aligned}$$

Notar que, ya que u_i es constante en cada subintervalo, la primera probabilidad en el sumatorio de la expresión (3.23) se convierte en una función indicadora, es decir, toma valores 0 ó 1. Las siguientes probabilidades son también sencillas de calcular debido a que $S_t^2/\sigma_0^2 \sim \Gamma((n-1)/2, 2\sigma^2/[(n-1)\sigma_0^2])$. Finalmente, sea $\mathbf{R}_{m \times m}$ la submatriz que contiene las probabilidades $r_{j,k}$ de ir del estado transitorio j al estado k , \mathbf{p}_{ini} es el vector de probabilidad inicial de los estados, \mathbf{I} es la matriz identidad de $m \times m$, y $\mathbf{1}$ es el vector de unos de $m \times 1$. Entonces, la función de probabilidad del RL y por lo tanto el ARL en *zero-state*, se definen por,

$$\Pr(RL = rl) = \mathbf{p}'_{ini} (\mathbf{R}^{rl-1} - \mathbf{R}^t) \mathbf{1},$$

y

$$ARL = \mathbf{p}'_{ini} (\mathbf{I} - \mathbf{R})^{-1} \mathbf{1}, \tag{3.24}$$

respectivamente. Lucas y Saccucci (1990) o Shu (2008) sugieren el cálculo del ARL en *steady-state* (obtenido del proceso controlado después de alcanzar el estado estacionario, es decir, después de haber pasado un tiempo suficiente para que el efecto del valor del estadístico de partida sea despreciable), usando un vector de probabilidad cíclico en *steady-state*, \mathbf{p}_{ss} , el cual se obtiene resolviendo $\mathbf{p}_{ss} = \mathbf{P}'_1 \mathbf{p}_{ss}$, sujeto a $\mathbf{1}' \mathbf{p}_{ss} = 1$, donde \mathbf{P}_1 es la matriz de probabilidad de transición definida por,

$$\mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{R} & (\mathbf{I} - \mathbf{R}) \mathbf{1} \\ 1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, el ARL en *steady-state* se obtiene por,

$$ARL = \mathbf{q}' (\mathbf{I} - \mathbf{R})^{-1} \mathbf{1}, \tag{3.25}$$

donde, \mathbf{q} es el vector de $m \times 1$ que se obtiene al quitar a \mathbf{p}_{ss} la entrada correspondiente al estado absorbente y normalizándolo para que la suma de las probabilidades sea uno.

Finalmente, para un ARL_0 dado y considerando subgrupos racionales de tamaño n , se puede resolver el siguiente problema de optimización no lineal con variable de decisión: $\beta =$

	AEWMA1-S ² -1	AEWMA2-S ² -1	AEWMA3-S ² -1	AEWMA1-S ² -2	AEWMA2-S ² -2	AEWMA3-S ² -2
λ_{\min}	0.0632	0.0277	0.0769	0.1888	0.3731	0.2441
λ_{\max}	0.1115	0.0787	0.1399	0.6239	1.0000	0.6578
a	2.3458	4.0097	8.5720	5.8904	9.3896	4.3676
p_0	0.3584	0.0278	0.5060	0.2990	0.2425	0.3361
h	0.2225	0.1188	0.2062	0.6812	0.6875	0.7717

Tabla 3.2: Diseños óptimos de los gráficos de control AEWMA-S² en zero-state, $ARL_0 = 200$ y $n = 5$.

	AEWMA1-S ² -1	AEWMA2-S ² -1	AEWMA3-S ² -1	AEWMA1-S ² -2	AEWMA2-S ² -2	AEWMA3-S ² -2
λ_{\min}	0.0181	0.0145	0.0385	0.1271	0.1770	0.1527
λ_{\max}	0.2249	0.7524	0.2510	0.3439	0.3395	0.2843
a	7.5594	7.2188	7.8067	3.8760	9.5038	3.1404
p_0	0.8866	0.7570	0.8832	0.2403	0.0357	0.5305
h	0.0546	0.0445	0.1085	0.5240	0.4029	0.4165

Tabla 3.3: Diseños óptimos de los gráficos de control AEWMA-S² en steady-state, $ARL_0 = 200$ y $n = 5$.

 $(\lambda_{\min}, \lambda_{\max}, a, p_0, h),$

$$\begin{aligned} & \min_{\beta} f(ARL(\tau(i))), i = 1, 2, \dots, k. \\ \text{sujeto a:} & \quad \quad \quad, \end{aligned} \quad (3.26)$$

donde $f(\cdot) : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$, puede ser $\sum_{i=1}^k ARL(\tau(i))$, la norma $\|ARL(\tau(i))\|_2$, o alguna otra función conveniente, la cual se define según algunos criterios de optimalidad adecuados. En este capítulo también se utiliza la distancia euclídea entre los vectores $[ARL(\tau(1)), ARL(\tau(2)), \dots, ARL(\tau(k))]$ y $[ARL^*(\tau(1)), ARL^*(\tau(2)), \dots, ARL^*(\tau(k))]$, donde el $ARL^*(i)$ es el correspondiente ARL^* mostrado en la Tabla 3.1. La función utilizada es bastante sencilla y tiene buen comportamiento. Por consiguiente, se calcula el $ARL(\tau(i), \lambda_{\min}, \lambda_{\max}, a, p_0, h)$ usando el enfoque de cadenas de Markov asumiendo que $X_t \sim N(\mu_0, \tau^2 \sigma^2)$.

Se consideran seis diseños en un proceso controlado en zero-state, para un $ARL_0 = 200$, subgrupos racionales de tamaño $n = 5$ y λ definido según (3.12), (3.15) o (3.16). Los primeros tres diseños usan el siguiente criterio de optimalidad: mínimo ARL en el rango de cambios $[1.1, 2]$, estos diseños son denotados como AEWMA1-S²-1, AEWMA2-S²-1 y AEWMA3-S²-1. Los otros tres diseños usan el criterio de optimalidad: mínimo ARL en el rango de cambios $[1.4, 2]$ y estos diseños se denotan como AEWMA1-S²-2, AEWMA2-S²-2 y AEWMA3-S²-2.

La Tabla 3.2 muestra los valores óptimos de los parámetros de los diversos diseños AEWMA-S² mencionados para el caso zero-state. De la misma forma, la Tabla 3.3 muestra los valores óptimos de los parámetros, en el caso steady-state. En este trabajo, por simplicidad y sin pérdida de generalidad, los valores del ARL se han calculado asumiendo que $\mu_0 = 0$ y $\sigma = 1$. Las Tablas 3.4 y 3.5 muestran los perfiles del ARL para zero-state y steady-state, respectivamente.

Gráficos de control AEWMA-S² con parámetro de suavizado variable en el tiempo

τ	AEWMA1-S ² -1	AEWMA2-S ² -1	AEWMA3-S ² -1	AEWMA1-S ² -2	AEWMA2-S ² -2	AEWMA3-S ² -2
1.1	41.79	41.99	42.63	53.09	54.44	54.19
1.2	17.19	17.20	17.41	21.14	21.74	21.73
1.3	10.04	9.91	10.00	11.22	11.43	11.47
1.4	7.01	6.82	6.87	7.16	7.22	7.26
1.5	5.40	5.18	5.22	5.14	5.15	5.18
1.6	4.43	4.18	4.22	3.99	3.97	3.99
1.7	3.78	3.52	3.55	3.26	3.23	3.26
2.0	2.71	2.43	2.45	2.16	2.14	2.15
2.5	1.95	1.70	1.71	1.51	1.50	1.51
3.0	1.58	1.39	1.40	1.27	1.26	1.27

Tabla 3.4: Valores del ARL con $n = 5$ en zero-state con $ARL_0 = 200$ y $n = 5$.

τ	AEWMA1-S ² -1	AEWMA2-S ² -1	AEWMA3-S ² -1	AEWMA1-S ² -2	AEWMA2-S ² -2	AEWMA3-S ² -2
1.1	37.33	37.33	38.32	45.32	44.78	44.78
1.2	14.38	14.43	14.67	17.07	16.86	16.86
1.3	8.10	8.14	8.16	8.92	8.85	8.85
1.4	5.60	5.63	5.58	5.73	5.72	5.72
1.5	4.34	4.36	4.29	4.20	4.20	4.20
1.6	3.59	3.61	3.54	3.34	3.35	3.35
1.7	3.10	3.12	3.05	2.81	2.82	2.82
2.0	2.30	2.31	2.25	2.01	2.01	2.01
2.5	1.70	1.71	1.68	1.51	1.50	1.50
3	1.41	1.41	1.40	1.30	1.28	1.29

Tabla 3.5: Valores del ARL en steady-state con $ARL_0 = 200$ y $n = 5$.

3.4. Gráfico de control AEWMA-S² basado en el valor del estadístico de control

En este gráfico AEWMA-S², al cual se denota como AEWMA4-S², λ_t se basa en el valor de y_{t-1} . Este gráfico usa el estadístico siguiente

$$D_t = \left| \frac{y_{t-1}}{H} \right| = \left| \frac{y_{t-1}}{h} \right|,$$

el cual es la razón entre el estadístico de monitorización previo y_{t-1} y el límite de control $H = h$. Mientras que y_{t-1} esté más cerca del límite de control, más cerca estará D_t de la unidad. Luego, usando (3.12) con $F_{1t} = D_t$ o (3.15) con $G_{2t} = D_t$, la evidencia del cambio se puede transformar en un parámetro de suavizado variable en el tiempo λ_t . Aquí, es importante notar que el estadístico D_t no depende de M_t , hecho que facilita el cálculo del ARL. La Figure 2.5 muestra el comportamiento de λ_t frente a D_t para dos diseños AEWMA4-S² (Dis-1 y Dis-2). Cuando el proceso está fuera de control, λ_t tiende a tomar el valor más alto posible.

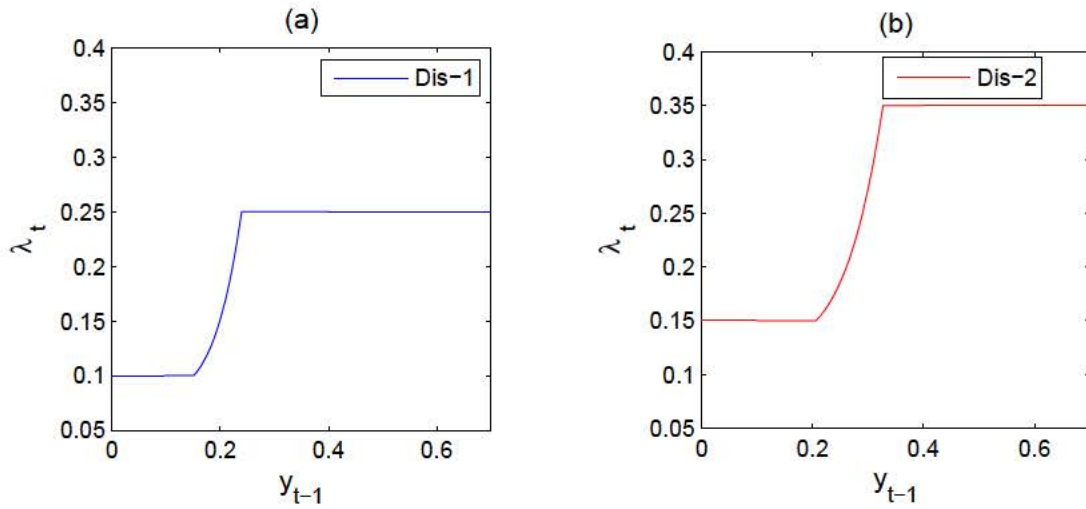


Figura 3.5: (a) Comportamiento de λ_t en función de y_{t-1} para el gráfico AEWMA4-S² con diseño Dis-1, con PS6: $\lambda_{\min} = 0.1$, $\lambda_{\max} = 0.25$, $a = 5$, $p_0 = 0.1$ y $h = 0.23912$. (b) Comportamiento de λ_t en función de y_{t-1} para el gráfico AEWMA4-S² con diseño Dis-2, con PS7: $\lambda_{\min} = 0.15$, $\lambda_{\max} = 0.35$, $a = 5$, $p_0 = 0.1$ y $h = 0.327$.

3.5. Cálculo del ARL del gráfico AEWMA4-S² usando el enfoque de cadenas de Markov

En este gráfico AEWMA-S², al λ_t no depender de M_t , el cálculo del ARL sigue el procedimiento tradicional propuesto por Brook y Evans (1972) y Lucas y Saccucci (1990). La probabilidad de transición definida en (3.19) puede ser reexpresada como sigue

$$\begin{aligned}
 P(j, k) &= \Pr[\nu_k - \nu_j - \omega/2 \leq (M_t - \nu_j) \lambda_t \leq \nu_k - \nu_j + \omega/2] \\
 &= \Pr\left[\frac{\nu_k - \nu_j - \omega/2}{\lambda_t} - \nu_j \leq M_t \leq \frac{\nu_k - \nu_j + \omega/2}{\lambda_t} - \nu_j\right] \\
 &= \Pr[\exp(b_1) < \exp(M_t) \leq \exp(b_2)] \\
 &= \Pr[\exp(b_1) < S_t^2/\sigma_0^2 \leq \exp(b_2)], \tag{3.27}
 \end{aligned}$$

donde, $b_1 = (\nu_k - \nu_j - \omega/2) / \lambda_t - \nu_j$ y $b_2 = (\nu_k - \nu_j + \omega/2) / \lambda_t - \nu_j$. La probabilidad de (3.27) se calcula haciendo uso de $S_t^2/\sigma_0^2 \sim \Gamma((n-1)/2, 2\sigma^2/[(n-1)\sigma_0^2])$. El ARL en zero-state y en steady-state se calcula según (3.24) o (3.25), respectivamente. Finalmente, los valores óptimos de los parámetros se pueden conseguir resolviendo el problema de optimización no lineal (3.26).

Por consiguiente, en este gráfico se han considerado dos diseños en zero-state para un $ARL_0 = 200$, subgrupos racionales de tamaño $n = 5$ y usando (3.12) con $F_{1t} = D_t$. El primer diseño toma en cuenta el siguiente criterio de optimalidad: minimizar el ARL en el rango de cambios $[1.1, 2]$,

	$ARL_0 = 200$, zero-state		$ARL_0 = 200$, steady-state	
	AEWMA4-S ² -1	AEWMA4-S ² -2	AEWMA4-S ² -1	AEWMA4-S ² -2
λ_{\min}	0.0886	0.5644	0.0821	0.2377
λ_{\max}	0.5863	0.6644	0.1121	0.4377
a	9.4988	1.1987	5.1453	10.9715
p_0	0.9983	0.8917	0.2222	0.9900
h	0.2182	0.8373	0.2059	0.4589

Tabla 3.6: Diseños óptimos de los gráficos de control AEWMA-S².

τ	$ARL_0 = 200$, zero-state		$ARL_0 = 200$, steady-state	
	AEWMA4-S ² -1	AEWMA4-S ² -2	AEWMA4-S ² -1	AEWMA4-S ² -2
1.1	43.96	53.85	41.25	45.46
1.2	18.19	21.78	15.67	17.28
1.3	10.60	11.56	8.52	9.09
1.4	7.41	7.33	5.71	5.86
1.5	5.74	5.23	4.33	4.30
1.6	4.74	4.05	3.54	3.43
1.7	4.08	3.31	3.04	2.89
2	3.00	2.21	2.27	2.10
2.5	2.25	1.56	1.78	1.61
3	1.87	1.30	1.56	1.40

Tabla 3.7: Valores del ARL con $n = 5$.

a este diseño se le denota como AEWMA4-S²-1. El otro diseño usa el criterio de optimalidad: minimizar el ARL en el rango de cambios $[1.4, 2]$ y se denota por AEWMA4-S²-2. Los valores óptimos de los parámetros se muestran en la Tabla 3.6. Los perfiles del ARL se muestran en la Tabla 3.7.

3.6. Comparaciones

En esta sección, se comparan los cuatro gráficos de control AEWMA-S² propuestos. Además, se comparan con otros gráficos de control tales como el gráfico de control Shewhart-S², el gráfico EWMA-S² de Castagliola et al. (2010) denotados aquí por EWMA-S²-CT y los gráficos de control EWMA adaptativos para el seguimiento de la varianza de Shu (2008) denotados aquí por AEWMA-S²-SH. A menos que se especifique lo contrario, todas las comparaciones consideran: ARL en zero-state, $ARL_0 = 200$, $n = 5$ y la escala del ARL en las figuras se considera logarítmica.

La Tabla 3.8 muestra un similar comportamiento en los cuatro primeros diseños AEWMA-S² presentados tanto para cambios pequeños como medianos, es decir en aproximadamente el rango de cambios $(1, 1.4]$. El diseño AEWMA1-S²-1 muestra un comportamiento ligeramente mejor que los demás en el rango $(1, 1.2]$. En el intervalo de cambios $1.2 < \tau \leq 3$, el gráfico AEWMA2-S²-2 muestra el mejor comportamiento seguido del AEWMA3-S²-2 y 1-S²-2. El AEWMA4-S²-1 pierde eficiencia para cambios medios y grandes.

Por otro lado, en dicha tabla se puede observar que los segundos cuatro diseños AEWMA-S² (1-2, 2-2, 3-2 y 4-2) tienen un comportamiento similar para cambios pequeños y medianos, en $1 < \tau \leq 1.5$, siendo el diseño AEWMA1-S²-2 el mejor. En el intervalo $\tau \in (1.5, 3]$, el diseño

3.6 Comparaciones

	τ									
	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	2.0	2.5	3.0
1-S²-1	41.79	17.19	10.04	7.01	5.40	4.43	3.78	2.71	1.95	1.58
2-S²-1	41.99	17.20	9.91	6.82	5.18	4.18	3.52	2.43	1.70	1.39
3-S²-1	42.63	17.41	10.00	6.87	5.22	4.22	3.55	2.45	1.71	1.40
4-S²-1	43.96	18.19	10.60	7.41	5.74	4.74	4.08	3.00	2.25	1.87
1-S²-2	53.09	21.14	11.22	7.16	5.14	3.99	3.26	2.16	1.51	1.27
2-S²-2	54.44	21.74	11.43	7.22	5.15	3.97	3.23	2.14	1.50	1.26
3-S²-2	54.19	21.73	11.47	7.26	5.18	3.99	3.26	2.15	1.51	1.27
4-S²-2	53.85	21.78	11.56	7.33	5.23	4.05	3.31	2.21	1.55	1.30
S-1	95.15	42.39	21.58	12.61	8.24	5.86	4.46	2.55	1.61	1.30
E-1	41.98	18.19	11.13	8.06	6.40	5.37	4.67	3.48	2.64	2.26
E-2	51.41	20.64	11.07	7.14	5.18	4.06	3.35	2.29	1.62	1.34
E-3	58.11	24.00	12.64	7.87	5.50	4.17	3.36	2.17	1.51	1.27
E-4	65.03	28.27	15.04	9.25	6.32	4.67	3.66	2.24	1.50	1.25
CT-1	46.33	20.64	13.17	9.73	7.76	6.48	5.58	3.96	2.67	2.03
CT-2	58.98	22.47	11.66	7.39	5.30	4.13	3.39	2.28	1.60	1.33
CT-3	60.70	24.91	12.99	8.02	5.57	4.20	3.36	2.16	1.49	1.26
CT-4	65.02	28.27	15.04	9.25	6.32	4.67	3.66	2.24	1.50	1.25
SH-1	44.37	18.20	10.48	7.17	5.39	4.29	3.55	2.35	1.59	1.30
SH-2	56.41	22.63	11.81	7.40	5.23	4.01	3.26	2.14	1.49	1.25

Tabla 3.8: Valores del ARL en zero-state con $ARL_0 = 200$ y $n = 5$. Se consideran: AEWMA1-S²-1 (1-S²-1), AEWMA2-S²-1 (2-S²-1), AEWMA3-S²-1 (3-S²-1), AEWMA4-S²-1 (4-S²-1), AEWMA1-S²-2 (1-S²-2), AEWMA2-S²-2 (2-S²-2), AEWMA3-S²-2 (3-S²-2), AEWMA4-S²-2 (4-S²-2), Shewhart-S² (S-1), EWMA-S²-1 (E-1), EWMA-S²-2 (E-2), EWMA-S²-3 (E-3), EWMA-S²-4 (E-4), EWMA-S²-CT1 (CT-1), EWMA-S²-CT2 (CT-2), EWMA-S²-CT3 (CT-3), EWMA-S²-CT4 (CT-4), AEWMA-S²-SH-1 (SH-1) y AEWMA-S²-SH-2 (SH-2).

AEWMA2-S²-2 es el que tiene el mejor comportamiento. El diseño AEWMA4-S²-2 pierde eficiencia para cambios medianos y grandes.

En la Tabla 3.8 también podemos comparar los primeros cuatro diseños AEWMA-S² con el gráfico de control Shewhart-S², considerando el mismo tamaño de subgrupos racionales, $n = 5$ (diseño S-1). Se puede observar que el gráfico de control Shewhart no es competitivo para cambios pequeños y medianos, hasta $\tau < 2$. Además, si comparamos los segundos cuatro diseños AEWMA-S² y el mismo diseño Shewhart-S² (S-1). En este caso, S-1 sigue siendo menos competitivo que los cuatro diseños AEWMA-S² hasta $\tau < 3$.

En la Tabla 3.8 podemos comparar los valores del ARL de los cuatro primeros diseños AEWMA-S² con dos diseños EWMA-S² competitivos. Estos dos gráficos EWMA-S² se diseñaron para obtener valores mínimos de ARL para desajustes $\tau = 1.1$ (E-1) y $\tau = 1.5$ (E-2). En este caso, se puede observar que los cuatro primeros diseños AEWMA-S² propuestos y sólo E-1 tienen un comportamiento similar para cambios pequeños, el AEWMA1-S²-1 es el más eficiente de todos. E-1 sólo es competitiva en $\tau = 1.1$. E-2 no es competitivo para cambios pequeños y medianos, hasta $\tau = 1.3$. Para $\tau = 1.4$, los tres primeros gráficos son mejores que E-2, siendo el AEWMA2-

S²-1 incluso hasta $\tau = 1.5$. Para cambios mayores, los tres primeros diseños AEWMA-S² son competitivos con E-2, siendo E-1 el más ineficiente. En definitiva, los cuatro gráficos de control AEWMA-S² muestran un buen comportamiento a través de todo el rango de cambios.

Siguiendo con las comparaciones, la Tabla 3.8 permite comparar los valores del ARL de los segundos cuatro diseños AEWMA-S² y el gráfico EWMA-S² con diseños que han sido optimizados para obtener valores de ARL mínimos en cambios $\tau = 2$ (E-3) y $\tau = 3$ (E-4). En este caso, se puede observar que los cuatro diseños AEWMA-S² tienen un buen comportamiento para cambios hasta $\tau < 2$. E-3 es competitivo sólo para $\tau \geq 2$ y E-4 para $\tau < 2.5$. Nótese que para $\tau = 2$, los tres primeros diseños tienen un buen comportamiento, siendo el AEWMA2-S²-2 el mejor, incluso hasta $\tau = 3$.

Adicionalmente, la Tabla 3.8 permite hacer la comparación entre los valores del ARL de los cuatro primeros diseños AEWMA-S² con dos gráficos alternativos EWMA-S²-CT. Estos gráficos EWMA-S²-CT se diseñaron para obtener valores de ARL mínimos en cambios $\tau = 1.1$ (CT-1) y $\tau = 1.5$ (CT-2). Esta comparación muestra que las cuatro propuestas AEWMA-S² tienen mejor comportamiento que CT-1 en todo el rango de cambios. Para cambios pequeños y medianos, $\tau < 1.4$, las cuatro propuestas son mejores que CT-2. Para $\tau = 1.4$, los tres primeros diseños son mejores, siendo el AEWMA2-S²-1 el más eficiente. Para $\tau = 1.5$, los gráficos AEWMA2-S²-1 y 3-S²-1 son los más eficientes, siendo el AEWMA2-S²-1 el mejor. Para $\tau \geq 1.6$, CT-2 es el más competitivo. Si comparamos los valores del ARL de los segundos cuatro diseños AEWMA-S² y dos gráficos EWMA-S²-CT que fueron diseñados para ser óptimos en cambios $\tau = 2$ (CT-3) y $\tau = 3$ (CT-4), podemos observar que las cuatro propuestas AEWMA-S² tienen mejor comportamiento que CT-3 hasta $\tau < 2$ y mejor que CT-4 hasta $\tau \leq 2.5$.

La última comparación es entre los gráficos de control AEWMA-S² propuestos y los gráficos de control AEWMA-S²-SH de Shu (2008). En este sentido, la Tabla 3.8 permite comparar los cuatro primeros gráficos de control AEWMA-S² propuestos (diseños optimizados para $\tau \in [1.1, 2]$ como se mencionó en la sección anterior) con el AEWMA-S²-SH-1 (diseño también optimizado para $\tau \in [1.1, 2]$) basado en la función de puntuación de Huber. Los cuatro primeros gráficos AEWMA-S² propuestos son mejores que el SH-1 para cambios pequeños y medianos, esto es en $\tau \in (1, 1.2]$, siendo el mejor el gráfico AEWMA1-S²-1. En el rango $(1.2, 1.4]$, los tres primeros gráficos son mejores que SH-1, siendo el AEWMA2-S²-1 el que presenta el mejor comportamiento. Pero, para cambios grandes, estos diseños son similares, siendo el AEWMA4-S²-1 el menos competitivo. En el rango $(1.4, 1.7]$, los gráficos AEWMA2-S²-1 y 3-S²-1 son más eficientes que SH-1, siendo el 2-S²-1 el mejor. Para cambios mayores, los gráficos propuestos son competitivos con SH-1.

La misma tabla permite hacer la comparación de los segundos cuatro gráficos de control AEWMA-S² (diseños optimizados para $\tau \in [1.4, 2]$ como se mencionó en la sección anterior) con el AEWMA-S²-SH-2 (diseño también optimizado para $\tau \in [1.4, 2]$) basado también en la función

3.7 Conclusiones

de puntuación de Huber. En general, de nuevo, se puede ver que el ARL de los cuatro diseños AEWMA-S² y SH-2 son similares en casi todo el rango de cambios. Los cuatro AEWMA-S² propuestos presentan mejor comportamiento que el SH-2 para cambios pequeños y medianos, esto es en $\tau \in (1, 1.6]$, excepto el gráfico AEWMA4-S²-2 para $\tau \in [1.5, 1.6]$, siendo el mejor de todos el AEWMA1-S²-2 hasta $\tau = 1.5$ y el gráfico AEWMA2-S²-2 para $\tau = 1.6$. Para $\tau = 1.7$, el AEWMA2-S²-2 es el más eficiente. Para cambios mayores, los cinco gráficos son competitivos. Todas las comparaciones se pueden observar en las Figuras 3.6, 3.7, 3.8, 3.9 y 3.10.

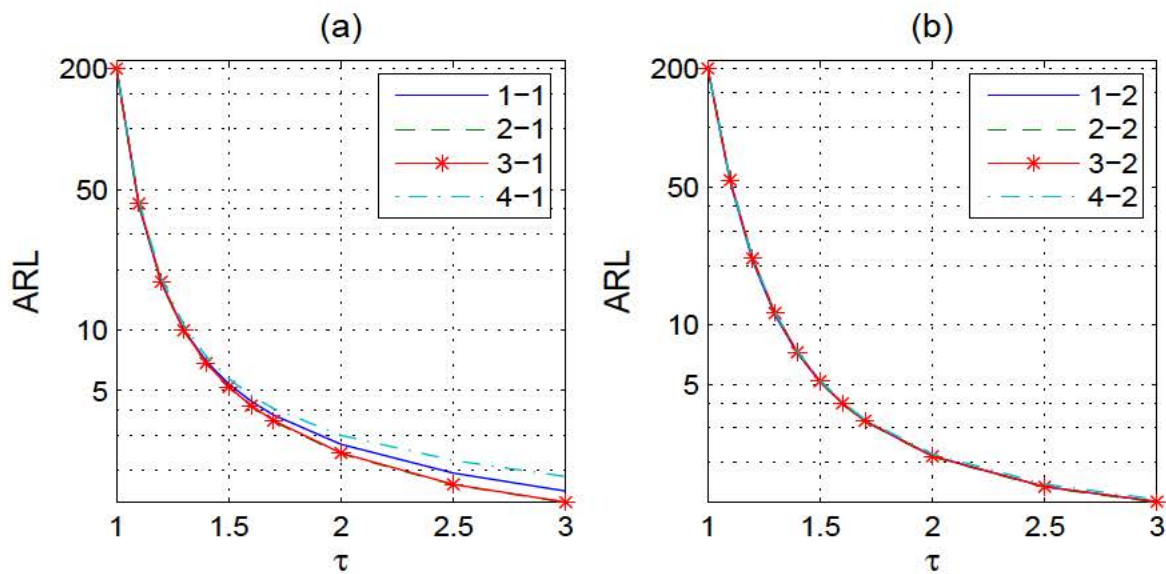


Figura 3.6: (a) Comparación del ARL de los cuatro primeros diseños AEWMA-S², AEWMA-S²-(1-1, 2-1, 3-1, 4-1). (b) Comparación del ARL de los segundos cuatro diseños AEWMA-S², AEWMA-S²-(1-2, 2-2, 3-2, 4-2). $ARL_0 = 200$, $n = 5$.

3.7. Conclusiones

Se han propuesto cuatro gráficos de control EWMA adaptativos para el control de la varianza de una variable que representa una característica de calidad en un proceso. Estos gráficos de control funcionan con un parámetro de suavizado variable en el tiempo. Los gráficos de control AEWMA-S² propuestos son fáciles de entender y de implementar en la práctica. Debemos tener en cuenta que la magnitud del desajuste depende de la naturaleza del proceso supervisado. Dado que en la operación real, los cambios más pequeños son más frecuentes que los cambios más grandes, se ha demostrado que estos gráficos propuestos tienen un buen comportamiento para los cambios pequeños y medianos e incluso para grandes y este hecho se muestra en las comparaciones con el gráficos AEWMA-S² de Shu (2008). Además, estos gráficos propuestos son competitivos con respecto a otros gráficos alternativos de la literatura sobre una amplia gama de cambios.

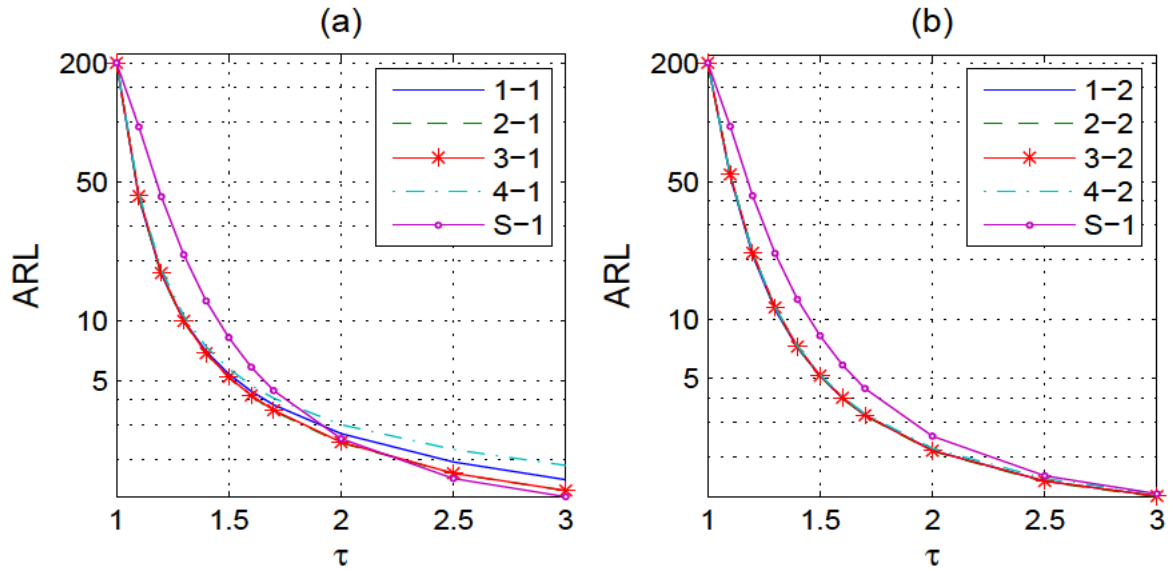


Figura 3.7: (a) Comparación del ARL de los cuatro primeros diseños AEWMA-S², AEWMA-S²-(1-1, 2-1, 3-1, 4-1) y del gráfico Shewhart-S², $n = 5$ (S-1). (b) Comparación del ARL de los segundos cuatro diseños AEWMA-S², AEWMA-S²-(1-2, 2-2, 3-2, 4-2) y del gráfico Shewhart-S², $n = 5$ (S-1). $ARL_0 = 200$.

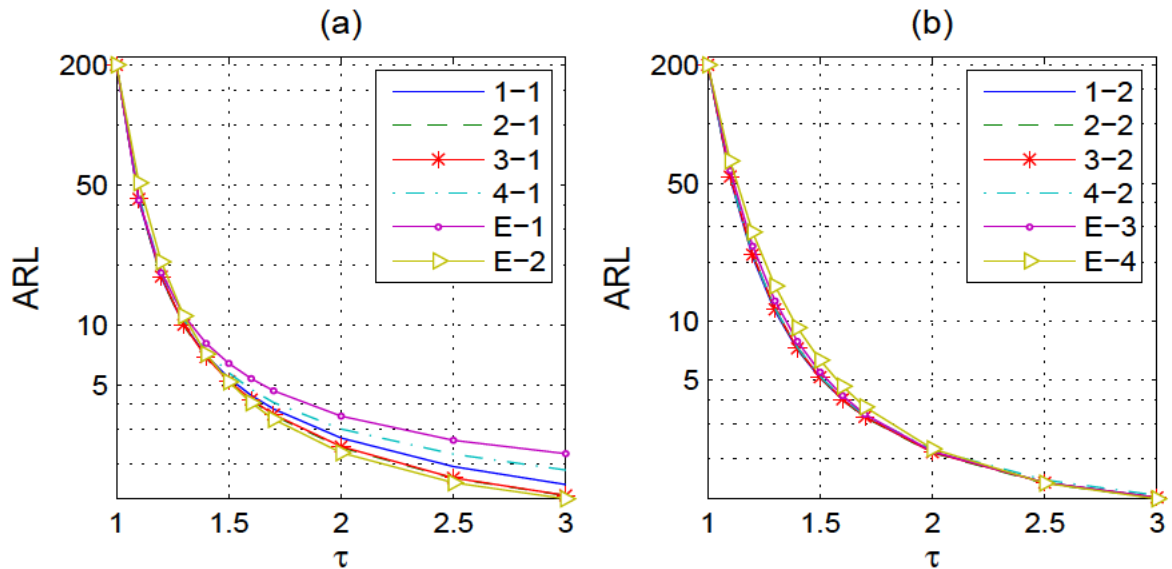


Figura 3.8: (a) Comparación del ARL de los primeros cuatro diseños AEWMA-S², AEWMA-S²-(1-1, 2-1, 3-1, 4-1) y de los diseños EWMA (E-1 y E-2). (b) Comparación del ARL de los segundos cuatro diseños AEWMA-S², AEWMA-S²-(1-2, 2-2, 3-2, 4-2) y de los diseños EWMA (E-3 y E-4). $ARL_0 = 200$ y $n = 5$.

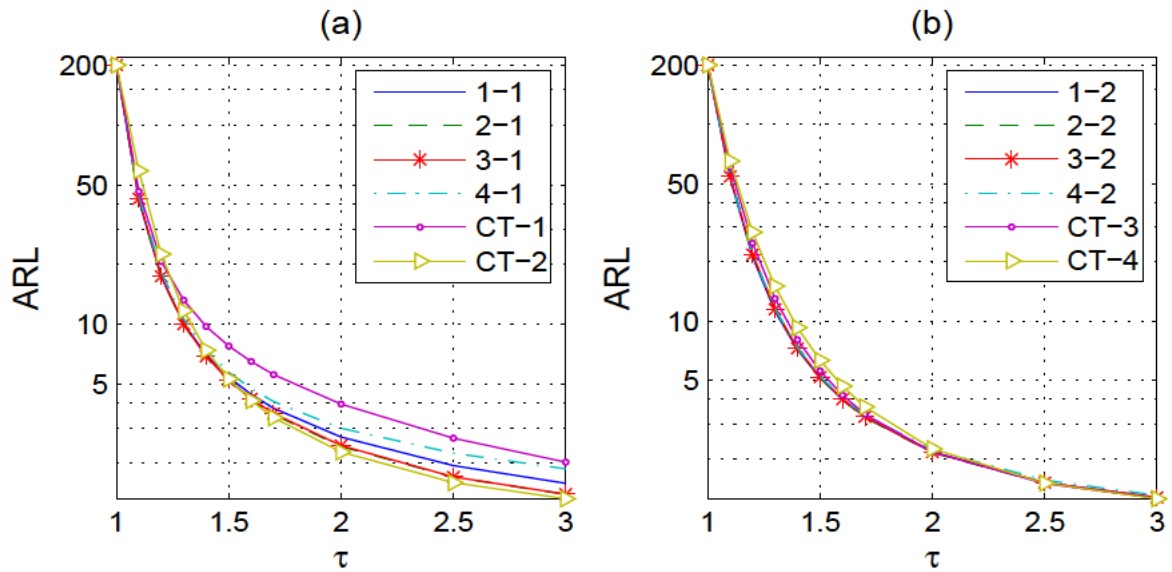


Figura 3.9: (a) Comparación del ARL de los cuatro primeros diseños AEWMA- S^2 , AEWMA- S^2 -(1-1, 2-1, 3-1, 4-1) y de los diseños EWMA (CT-1 y CT-2). (b) Comparación del ARL de los segundos cuatro diseños AEWMA- S^2 , AEWMA- S^2 -(1-1, 2-2, 3-2, 4-2) y de los diseños EWMA (CT-3 y CT-4). $ARL_0 = 200$ y $n = 5$.

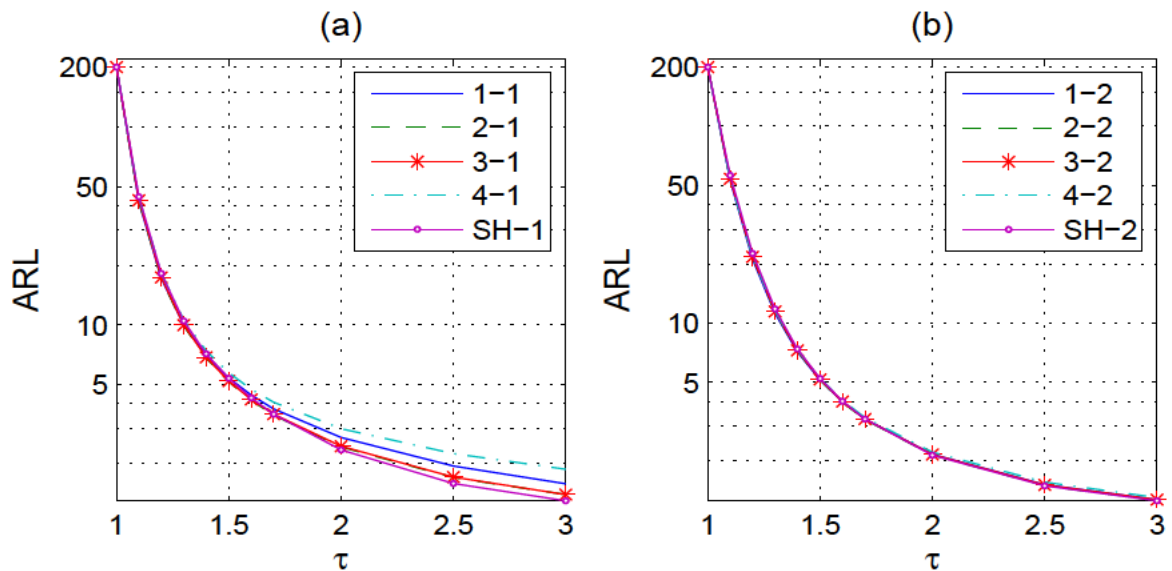


Figura 3.10: (a) Comparación del ARL de los cuatro primeros diseños AEWMA- S^2 , AEWMA- S^2 -(1-1, 2-1, 3-1, 4-1) y el diseño AEWMA- S^2 -SH-1. (b) Comparación del ARL de los segundos cuatro diseños AEWMA- S^2 , AEWMA- S^2 -(1-2, 2-2, 3-2, 4-2) y el diseño AEWMA- S^2 -SH-2. $ARL_0 = 200$ y $n = 5$.

Conclusiones y Extensiones

Conclusiones

El principal objetivo de los gráficos de control estadístico es la detección eficiente de cambios en alguna característica de calidad del proceso. Esta idea se puede resumir en conseguir que el ARL cuando el proceso esté fuera de control sea lo más pequeño posible y, al mismo tiempo, que el ARL cuando el proceso esté bajo control sea lo más alto posible. Para optimizar un gráfico de control tradicional, con o sin memoria, es necesario suponer previamente una magnitud de desajuste. Esa forma estática de diseño, les puede llevar a ser ineficientes si se produce un cambio de magnitud inesperada. Es por ello que en la literatura se ha venido desarrollando gráficos de control más robustos, en los que destacan los gráficos de control con diseño adaptativo los cuales tratan de ser eficientes en un rango de cambios esperado. En consecuencia, este trabajo tiene como principales contribuciones desarrollar procedimientos alternativos que sean sencillos de entender e implementar en los gráficos de control EWMA, y que incrementen la potencia en la detección de cambios en algún estadístico del proceso, específicamente, en un rango de cambios de interés. Estos procedimientos se basan en la adaptación del parámetro λ del gráfico EWMA a lo que evidencien los datos del proceso. En este sentido se proponen algunos estadísticos que permiten cuantificar tal evidencia.

En el Capítulo 2, se desarrollan cuatro gráficos de control EWMA adaptativos para monitorizar la media de un proceso, los cuales utilizan un parámetro de suavizado variable en el tiempo, λ_t . Con este fin, se han propuesto estadísticos adecuados que permiten medir cambios en los datos. Dichos estadísticos se han transformado de una forma sencilla y eficiente en el parámetro de diseño λ del gráfico de control EWMA, de manera que a mayor potencial desajuste, mayor valor de λ , y a menor potencial desajuste menor valor de λ . Dicha transformación reduce la pérdida de eficiencia por cambios bruscos en los datos y proporciona facilidad en el diseño del gráfico para rangos de cambios predeterminados. Los gráficos de control propuestos presentan un buen comportamiento, en términos del ARL, en la detección de cambios en la media de un proceso, en dos rangos de cambio específicos. Los resultados se han comparado con los obtenidos en los gráficos de control EWMA adaptativos de la literatura y se ha podido comprobar que los gráficos

propuestos son muy competitivos sobre todo para cambios pequeños y medianos.

Así como se ha desarrollado el control de la media del proceso a través de los gráficos EWMA adaptativos, en el Capítulo 3, se han desarrollado cuatro gráficos de control EWMA-S² adaptativos para la monitorización de la varianza del proceso. En primer lugar, se ha considerado un estadístico de monitorización de la varianza que sea capaz de ser utilizado en el estadístico EWMA. Luego de forma análoga al capítulo anterior, se han introducido estadísticos de medición del desajuste y transformaciones adecuadas para obtener el parámetro λ del EWMA. Posteriormente, se ha comprobado que dichos gráficos presentan un buen comportamiento respecto al gráfico AEWMA-S² de la literatura, sobre todo en los rangos de cambios pequeños y medianos que son de gran interés en la práctica.

Extensiones

En este trabajo se desarrollan gráficos de control EWMA adaptativos para el seguimiento de la media y la varianza de un proceso. Sin embargo, estas mismas ideas se pueden extender para otras situaciones. A continuación, se presentan algunas direcciones a seguir en investigaciones futuras:

Respecto al gráfico de control CUSUM

- En esta tesis se han propuesto procedimientos adaptativos que también se pueden extender a los gráficos de control CUSUM, buscando formas alternativas de encontrar el valor adecuado del parámetro k del CUSUM en función de la evidencia del cambio, tanto para monitorizar la media como la varianza del proceso. Por ejemplo, un gráfico de control CUSUM adaptativo para el seguimiento de la media podría consistir en obtener una estimación $\hat{\mu}_t$ de la media del proceso de alguna forma adecuada. Entonces $\hat{\mu}_t - \mu_0$, siendo μ_0 el valor objetivo de la característica de calidad del proceso, puede utilizarse para estimar el desajuste δ_t del ACUSUM mediante $\hat{\delta}_t = (\hat{\mu}_t - \mu_0)/\sigma$, donde σ es la desviación típica del proceso. Con este $\hat{\delta}_t$, se calcularía el valor de referencia k_t adaptativo que se utiliza en la definición del CUSUM como, $k_t = \hat{\delta}_t/2$, consiguiendo que según sea el valor de k , el estadístico cambie su nivel de memoria, logrando que sea eficiente en función de la magnitud del cambio estimado.

Respecto al seguimiento de la varianza de un proceso

- En el caso de la monitorización de la varianza, de los estudios realizados en la literatura, se aprecia que se han dedicado muchos esfuerzos en la consecución de estadísticos que tengan distribuciones aproximadas a distribuciones conocidas con el fin de lograr procedimientos más adecuados de cara a la aplicación del EWMA (ver Castagliola, 2005 y Castagliola et

al., 2010, entre otros). De todo ello, es posible explorar la introducción de procedimientos adaptativos dependientes de los estadísticos propuestos en esos trabajos, teniendo como principal dificultad la aproximación del ARL de forma teórica.

Respecto al seguimiento simultáneo de la media y la varianza del proceso

- En esta tesis hemos abordado el control de la media y de la varianza como dos procedimientos independientes. Es una opción natural explorar la idea de introducir un único procedimiento de control adaptativo que monitorice cambios en la media o en la varianza de forma simultánea. En este sentido, supongamos que las observaciones $X_{t,i}$, $t = 1, 2, \dots$ e $i = 1, 2, \dots, n$ son independientes e idénticamente distribuidas $N(\mu_t, \sigma_t^2)$. Además, sea μ_0 y σ_0 la media y desviación típica del proceso, ambas conocidas. Entonces, los parámetros del proceso se pueden expresar como $\mu = \mu_0 + \delta\sigma_0$ y $\sigma = \tau\sigma_0$, donde $\tau > 0$, por lo que el proceso está bajo control cuando $\delta = 0$ y $\tau = 1$. Chen, Cheng y Xie (2004) proponen el siguiente estadístico

$$T_t = (\bar{X}_t - \mu_0)^2 + \frac{n-1}{n} S_t^2,$$

donde \bar{X}_t y S_t^2 son la t -ésima media muestral y la t -ésima varianza muestral, respectivamente. Además, suponiendo que $T_t^* = (n/\sigma_0^2) T_t$, introducen el estadístico EWMA

$$Q_t = (1 - \lambda) Q_{t-1} + \lambda T_t^*.$$

Costa y Rahim (2006), también proponen procedimientos para hacer el seguimiento de la media y la varianza de forma simultánea. Para ello, bajo los mismos supuestos definidos al inicio, introducen la diferencia $e_t = \bar{X}_t - \mu_0$ y definen

$$\xi_t = \begin{cases} d, & \text{si } e_t \geq 0 \\ -d & \text{si } e_t < 0 \end{cases},$$

$$W_t = \sum_{i=1}^n (X_{t,i} - \mu_0 + \xi_t \sigma_0)^2,$$

donde d es una constante positiva. Entonces, proponen el estadístico EWMA como sigue

$$Y_t = (1 - \lambda) Y_{t-1} + \lambda W_t.$$

Teniendo en cuenta las propuestas de Chen, Cheng y Xie (2004) y Costa y Rahim (2006), se puede buscar una forma de traducir el estadístico T_t^* o W_t en el parámetro λ para hacer adaptativos estos dos gráficos.

Respecto al ámbito multivariado

- En este trabajo se han explorado gráficos EWMA adaptativos univariados. Hoy en día, con la facilidad de conseguir datos y con el uso de ordenadores en tiempo real para el control de procesos, es posible monitorizar simultáneamente varias características de calidad relacionadas con las variables del proceso. Estas técnicas, a través de los gráficos de control multivariados, forman parte del SPC multivariado. Remontándonos a los orígenes, Hotelling (1947) introduce el gráfico de control multivariado más sencillo conocido como T^2 de Hotelling que es el equivalente al gráfico de control Shewhart; Crosier (1988) presenta la versión multivariada del gráfico de control de sumas acumuladas (MCUSUM), Lowry et al. (1992) hacen lo propio con el gráfico de control EWMA multivariado (MEWMA). Otras aportaciones relevantes se pueden encontrar en Woodall y Ncube (1985), Lowry y Montgomery (1995), Golnabi y Houshmand (1999), Bersimis et al (2007) y Ferrer (2007), entre otros. A partir de estos gráficos multivariados es que nace el interés de hacerlos más eficientes en la detección de desajustes en el proceso y aparecen propuestas de gráficos de control multivariados adaptativos, como las presentadas por Aparisi (1996), Aparisi y García (2001), Chen (2007), Dai et al. (2011), entre otros. Siguiendo esta dirección, y tomando en cuenta la propuestas presentadas en este trabajo, se puede evaluar alternativas para introducir parámetros variables en el tiempo en los gráficos CUSUM y EWMA multivariados para convertirlos en adaptativos.

Bibliografía

- [1] Abbasi, S. A. (2010). On sensitivity of EWMA control chart for monitoring process dispersion. In Proceedings of the World Congress on Engineering, 3, 2027-2032.
- [2] Abbasi, S. A. and Miller, A. (2013). MDEWMA chart: an efficient and robust alternative to monitor process dispersion. Journal of Statistical Computation and Simulation, 83, 247-268.
- [3] Acosta-Mejia, C. A. (1998). Monitoring reduction in variability with the range. IIE transactions, 30, 515-523.
- [4] Acosta-Mejia, C. A., Pignatiello, J. J. and Rao, B. V. (1999). A comparison of control charting procedures for monitoring process dispersion. IIE transactions, 31, 569-579.
- [5] Acosta-Mejia, C. A. (2007). Two sets of runs rules for the \bar{X} chart. Quality Engineering, 19, 129-136.
- [6] Amin, R. W. and Hemasinha, R. (1993). The switching behavior of \bar{X} charts with variable sampling intervals. Communications in Statistics-Theory and Methods, 22, 2081-2102.
- [7] Amin, R. W., Wolff, H., Besenfelder, W. and Baxley Jr, R. (1999). EWMA control charts for the smallest and largest observations. Journal of Quality Technology, 31, 189-201.
- [8] Antzoulakos, D. L. and Rakitzis, A. C. (2007). The revised m-of-k runs rule. Quality Engineering, 20, 75-81.
- [9] Aparisi, F. (1996). Hotelling's T^2 control chart with adaptive sample sizes. International Journal of Production Research, 34, 2853-2862.
- [10] Aparisi, F. and García, J. C. (2001). Aumento de la potencia del gráfico de control multivariante T^2 de Hotelling utilizando señales adicionales de falta de control. Estadística Española, 43, 171-88.
- [11] Arnold, J. C. and Reynolds, M. R. (2001). CUSUM control charts with variable sample sizes and sampling intervals. Journal of Quality Technology, 33, 66-81.

-
- [12] Bagshaw, M. and Johnson, R. A. (1975). The effect of serial correlation on the performance of CUSUM tests II. *Technometrics*, 17, 73-80.
- [13] Barr, D. R. and Sherrill, E. T. (1999). Mean and variance of truncated normal distributions. *The American Statistician*, 53, 357-361.
- [14] Baxley, R. V. (1995). An application of variable sampling interval control chart. *Journal of Quality Technology*, 27, 275-282.
- [15] Beaton, A. E. and Tukey, J. W. (1974). The fitting of power series, meaning polynomials, illustrated on Band-Spectroscopic data. *Technometrics*, 16, 147-185.
- [16] Bersimis, S., Psarakis S. and Panaretos J. (2007). Multivariate statistical process control charts: an overview. *Quality and Reliability Engineering International*, 23, 517-543.
- [17] Bertrand, L. (1990). Quality control and application. Díaz de Santos S. A., España.
- [18] Bissell, A. F. (1969). CUSUM techniques for quality control. *Applied Statistics*, 18, 1-30.
- [19] Box, G. E., Hunter, W. G. and Hunter, J. S. (1978). *Statistics for experimenters*. John Wiley & Sons, New York, NY.
- [20] Box, G. E. P. and Ramirez, J. G (1991a). Sequential Methods in Statistical Process Monitoring. Report No. 65, Center for Quality and Productivity Improvement, University of Wisconsin-Madison, Madison, WI.
- [21] Box, G. E. P. and Ramirez, J. G. (1991b). Sequential Methods in Statistical Process Monitoring. Report No. 66, Center for Quality and Productivity Improvement, University of Wisconsin-Madison, Madison, WI.
- [22] Box, G. E. P. and Ramirez, J. G. (1991c). Sequential Methods in Statistical Process Monitoring. Report No. 67, Center for Quality and Productivity Improvement, University of Wisconsin-Madison, Madison, WI.
- [23] Brook, D. and Evans, D. A. (1972). An approach to the probability distribution of CUSUM run length. *Biometrika*, 59, 539-549.
- [24] Capizzi, G. and Masarotto, G. (2003). An adaptive exponentially weighted moving average control chart. *Technometrics*, 45, 199-207.
- [25] Castagliola, P. (2005). A New S^2 -EWMA Control Chart for Monitoring the Process Variance. *Quality and Reliability Engineering International*, 21, 781-794.

BIBLIOGRAFÍA

- [26] Castagliola, P., Celano, G., Fichera, S. and Giuffrida, F. (2006). A variable sampling interval S^2 -EWMA control chart for monitoring the process variance. *International Journal of Technology Management*, 37, 125-146.
- [27] Castagliola, P., Celano, G., Fichera, S. and Nunnari, V. (2008). A variable sample size S^2 -EWMA control chart for monitoring the process variance. *International Journal of Reliability, Quality and Safety Engineering*, 15, 181-201.
- [28] Castagliola, P., Celano, G. and Fichera, S. (2009). A new CUSUM- S^2 control chart for monitoring the process variance. *Journal of Quality in Maintenance Engineering*, 15, 344-357.
- [29] Castagliola, P., Celano, G. and Fichera, S. (2010). A Johnson's type transformation EWMA- S^2 control chart. *International Journal of Quality Engineering and Technology*, 1, 253-275.
- [30] Castagliola, P., Zhang, Y., Costa, A. and Maravelakis, P. (2012). The variable sample size \bar{X} chart with estimated parameters. *Quality and Reliability Engineering International*, 28, 687-699.
- [31] Costa, A. F. (1994). \bar{X} charts with variable sample size. *Journal of Quality Technology*, 26, 155-163.
- [32] Costa, A. F. (1997). \bar{X} charts with variable sample size and sampling intervals. *Journal of Quality Technology*, 29, 197-204.
- [33] Costa, A. F. B. (1999a). Joint \bar{X} and R charts with variable sample sizes and sampling intervals. *Journal of Quality Technology*, 31, 387-397.
- [34] Costa, A. F. B. (1999b). \bar{X} charts with variable parameters. *Journal of Quality Technology*, 31, 408-416.
- [35] Costa, A. F. B. and Rahim, M. A. (2006). A single EWMA chart for monitoring process mean and process variance. *Quality Technology & Quantitative Management*, 3, 295-305.
- [36] Champ, C. W. and Woodall, W. H. (1987). Exact results for Shewhart control charts with supplementary runs rules. *Technometrics*, 29, 393-399.
- [37] Champ, C. W., Woodall, W. H. and Mohsen, H. A. (1991). A generalized quality control procedure. *Statistics & probability letters*, 11, 211-218.
- [38] Chang, T. C. and Gan, F. F. (1995). Cumulative sum control chart for monitoring process variance. *Journal of Quality Technology*, 27, 109-119.

-
- [39] Chen, G. (1997). The mean and standard deviation of the run length distribution of \bar{X} charts when control limits are estimated. *Statistica Sinica* 7, 789-798.
- [40] Chen, G. (1998). The run length distributions of the R, S and S^2 control charts when is estimated. *The Canadian Journal of Statistics* 26, 311-322.
- [41] Chen, Y., Le-Ngoc, T., Champagne, B. and Xu, C. (2004). Recursive least squares constant modulus algorithm for blind adaptive array. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 52, 1452-1456.
- [42] Chen, G., Cheng, S. W. and Xie, H. (2004). A new EWMA control chart for monitoring both location and dispersion. *Quality Technology & Quantitative Management*, 1, 217-231.
- [43] Chen, Y. K. (2007). Adaptive sampling enhancement for Hotelling's T^2 charts. *European Journal of Operational Research*, 178, 841-857.
- [44] Chengular, I., Arnolds, J. and Reynolds Jr., M.R. (1993). Variable sampling intervals for multiparameter Shewhart charts. *Communications in Statistics: Theory and Methods*, 18, 1769-1792.
- [45] Chao-Wen, L. and Reynolds Jr, M. R. (1999). EWMA control charts for monitoring the mean of autocorrelated processes. *Journal of Quality Technology*, 31, 166-188.
- [46] Chou, C. Y., Cheng, J. C. and Lai, W. T. (2008). Economic design of variable sampling intervals EWMA charts with sampling at fixed times using genetic algorithms. *Expert Systems with Applications*, 34, 419-426.
- [47] Crosier, R. B. (1988). Multivariate generalizations of cumulative sum quality-control schemes. *Technometrics*, 30, 291-303.
- [48] Crowder, S. V. (1987a). Average run lengths of exponentially weighted moving average control charts. *Journal of Quality Technology*, 19, 161-164.
- [49] Crowder, S. V. (1987b). A simple method for studying run length distribution of exponentially weighted moving average control charts. *Technometrics*, 29, 401-407.
- [50] Crowder, S. V. (1989). Design of exponentially weighted moving average schemes. *Journal of Quality Technology*, 21, 155-162.
- [51] Crowder, S. V. and Hamilton, M. D. (1992). An EWMA for monitoring a process standard deviation. *Journal of Quality Technology*, 24, 12-21.

BIBLIOGRAFÍA

- [52] Cui, R. Q. and Reynolds, M. R. (1988). Chart with runs and variable sampling intervals. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 17, 1073-1093.
- [53] Dai, Y., Luo Y., Li Z. and Wang Z. (2011). A new adaptive CUSUM control chart for detecting the multivariate process mean. *Quality and Reliability Engineering International*, 27, 877-884.
- [54] Daudin, J. J. (1992). Double sampling \bar{X} charts. *Journal of Quality Technology*, 24, 78-87.
- [55] Davis, R. B. and Woodall, W. H. (1988). Performance of the control chart trend rule under linear shift. *Journal of Quality Technology*, 20, 260-262.
- [56] Davis, R. B., Homer, A. and Woodall, W. H. (1990). Performance of the zone control chart. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 19, 1581-1587.
- [57] Derman, C. and Ross, S. M. (1997). *Statistical aspects of quality control*. San Diego, CA: Academic Press.
- [58] Ewan, W. D. and Kemp, K. W. (1960). Sampling inspection of continuous processes with no autocorrelation between successive results. *Biometrika*, 47, 363-380.
- [59] Ferrer, A. (2007). Multivariate statistical process control based on principal component analysis (MSPC-PCA): Some reflections and a case study in an autobody assembly process. *Quality Engineering*, 19, 311-325.
- [60] Gan, F. F. (1991). An optimal design of CUSUM quality control charts. *Journal of Quality Technology*, 23, 279-286.
- [61] Gan, F. F. (1995). Joint monitoring of process mean and variance using exponentially weighted moving average control charts. *Technometrics*, 37, 446-453.
- [62] Golnabi, S. and Houshmand, A. A. (1999). Multivariate Shewhart \bar{X} chart. *Inter Stat*, 4.
- [63] Han, D. and Tsung, F. (2004). A generalized EWMA control chart and its comparison with the optimal EWMA, CUSUM and GLR schemes. *The Annals of Statistics*, 32, 316-339.
- [64] Han D., Tsung F. and Li, Y. (2007). A CUSUM chart with local signal amplification for detecting a range of unknown shifts. *International Journal of Reliability, Quality and Safety Engineering*, 14, 81-97.
- [65] Haq, A., Brown, J. and Moltchanova, E. (2014). New exponentially weighted moving average control charts for monitoring process mean and process dispersion. *Quality and Reliability Engineering International*.

-
- [66] Hawkins, D. M. (1979). A CUSUM for a scale parameter. Council for Scientific and Industrial Research [CSIR]. National Research Institute for Mathematical Sciences [NRIMS].
- [67] Hawkins, D. M. (1992). A fast, accurate approximation of average run lengths of CUSUM control charts. *Journal of Quality Technology*, 24, 37-43.
- [68] Hawkins, D. M. (1993). Cumulative sum control charting: An underutilized SPC tool. *Quality Engineering*, 5, 463-477.
- [69] Hawkins, D.M. and Olwell, D.H. (1998). Cumulative sum chart and charting for quality improvement. Springer-Verlag Inc., New York, USA.
- [70] Hotelling, H. (1947). Multivariate quality control. In C. Eisenhart, M. W. Hastay, and W. A. Wallis, eds. *Techniques of Statistical Analysis*. New York: McGraw-Hill.
- [71] Huber, P. J. (1981). *Robust statistics*. New York: Wiley.
- [72] Hunter, J. S. (1986). The exponentially weighted moving average. *Journal of Quality Technology* 18, 203-210.
- [73] Hunter, J. S. (1989). A one-point plot equivalent to the Shewhart chart with Western Electric Rules. *Quality Engineering*, 2, 13-19.
- [74] Huwang, L., Huang, C. J. and Wang, Y. H. T. (2010). New EWMA control charts for monitoring process dispersion. *Computational Statistics & Data Analysis*, 54, 2328-2342.
- [75] Jensen, W., Jones-Farmer, L., Champ, C. and Woodall, W. (2006). Effects of parameter estimation on control chart properties: A literature review. *Journal of Quality Technology*, 38, 349-364.
- [76] Jiang, W., Shu L. and Apley, D. W. (2008). Adaptive CUSUM procedures with EWMA-based shift estimators. *IIE Transactions*, 40, 992-1003.
- [77] Johnson, N. L. (1949). Systems of frequency curves generated by methods of translation. *Biometrika*, 36, 149-176.
- [78] Johnson, N. L. and Leone, F. C. (1962). Cumulative Sum Control Charts—Mathematical Principles Applied to Their Construction and Use. *Industrial Quality Control*, 18, 15-21.
- [79] Jones, L. A. (2002). The statistical design of EWMA control charts with estimated parameters. *Journal of Quality Technology*, 34, 277-288.

BIBLIOGRAFÍA

- [80] Keats, J. B., Miskulin J. D. and Runger, G. C. (1995). Statistical process control scheme design. *Journal of Quality Technology*, 27, 214-225.
- [81] Khoo, M. B. C. and Ariffin, K. N. B. (2006). Two improved runs rules for the Shewhart control chart. *Quality Engineering*, 18, 173-178.
- [82] Kim, M. J. (2005). Number of replications required in control chart Monte Carlo simulation studies, Ph.D. diss, University of Northern Colorado.
- [83] Klein, M. (2000). Two alternatives to the Shewhart \bar{X} control chart. *Journal of Quality Technology*, 32, 427-431.
- [84] Koutras, M. V., Bersimis, S. and Maravelakis, P. E. (2007). Statistical process control using Shewhart control charts with supplementary runs rules. *Methodology and Computing in Applied Probability*, 9, 207-224.
- [85] Lowry, C. A. and Montgomery, D. C. (1995). A review of multivariate control charts. *IIE Transactions*, 27, 800-810.
- [86] Lowry, C. A., Woodall, W. H., Champ, C. W. and Rigdon, S. E. (1992). A multivariate exponentially weighted moving average control chart. *Technometrics* 34, 46-53.
- [87] Lowry, C. A., Champ, C. W. and Woodall, W. H. (1995). The performance of control charts for monitoring process variation. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 24, 409-437.
- [88] Lu, C. W. and Reynolds Jr., M. R. (1999). Control charts for monitoring the mean and variance of autocorrelated processes. *Journal of Quality Technology*, 31, 259-274.
- [89] Lucas, J. M. (1982). Combined Shewhart-CUSUM quality control schemes. *Journal of Quality Technology*, 14, 51-59.
- [90] Lucas, J. M. (1985). Counted Data CUSUM's. *Technometrics*, 27, 129-144.
- [91] Lucas, J. M. and Crosier, R. B. (1982). Fast initial response for CUSUM quality-control schemes: give your CUSUM a head start. *Technometrics*, 24, 199-205.
- [92] Lucas, J. M. and Saccucci, M. S. (1990). Exponentially weighted moving average control schemes: Properties and Enhancements (with discussion), *Technometrics*, 32, 1-29.
- [93] Luo Y., Li Z. and Wang, Z. (2009). Adaptive CUSUM control chart with variable sampling intervals. *Computational Statistics & Data Analysis*, 53, 2693-2701.

-
- [94] MacGregor, J. F. and Harris, T. J. (1993). The exponentially weighted moving variance. *Journal of Quality Technology*, 25, 106-118.
- [95] Maravelakis, P. E. and Castagliola, P. (2009). An EWMA chart for monitoring the process standard deviation when parameters are estimated. *Computational Statistics & Data Analysis*, 53, 2653-2664.
- [96] Mahadik, S. B. (2013). \bar{X} Charts with variable sample size, sampling interval, and warning limits. *Quality and Reliability Engineering International*, 29, 535-544.
- [97] Montgomery, D. C., Gardiner, J. S. and Pizzano, B. A. (1987). Statistical process control methods for detecting small process shifts. In *Frontiers in Statistical Quality Control*, eds. H.-J. Lenz, G. B. Wetherill, and P. T. Wilrich, Heidelberg, West Germany: Physica-Verlag, 161-178.
- [98] Montgomery, D. C. (2012). *Introduction to statistical quality control* (Seventh Edition). John Wiley & Sons, Inc. The United States of America.
- [99] Nazir, H. Z., Riaz, M. and Does, R. J. (2015). Robust CUSUM control charting for process dispersion. *Quality and Reliability Engineering International*, 31, 369-379.
- [100] Nelson, C. S. (1984). The Shewhart control charts - test for special causes. *Journal of Quality Technology*, 16, 237-239.
- [101] Ng, C. H. and Case, K. E. (1989). Development and evaluation of control charts using exponentially weighted moving averages. *Journal of Quality Technology*, 21, 242-250.
- [102] Page, E. S. (1954). Continuous inspection schemes. *Biometrika*, 41, 100-114.
- [103] Page, E. S. (1955a). Control charts with warning lines. *Biometrika*, 42, 243-257.
- [104] Page, E. S. (1955b). A test for a change in a parameter occurring at an unknown point. *Biometrika*, 42, 523-527.
- [105] Page, E. S. (1961). Cumulative sum charts. *Technometrics*, 3, 1-9.
- [106] Page, E. S. (1963). Controlling the standard deviation by CUSUMS and warning lines. *Technometrics*, 5, 307-315.
- [107] Prabhu, S. S., Runger, G. C. and Keats, J. B. (1993). \bar{X} chart with adaptive sample sizes. *The International Journal of Production Research*, 31, 2895-2909.

BIBLIOGRAFÍA

- [108] Prabhu, S. S., Montgomery, D. C. and Runger, G. C. (1994). A combined adaptive sample size and sampling interval \bar{X} control scheme. *Journal of Quality Technology*, 26, 164-176.
- [109] Reynolds, J. H. (1971). The run sum control chart procedure. *Journal of Quality Technology*, 3, 23-27.
- [110] Reynolds, M. R. (1995). Evaluating properties of variable sampling interval control charts. *Sequential Analysis*, 14, 59-97.
- [111] Reynolds, M. R. (1996a). Shewhart and EWMA variable sampling interval control charts with sampling at fixed times. *Journal of Quality Tecnology*, 28, 199-212.
- [112] Reynolds, M. R. (1996b). Variable-sampling-interval control charts with sampling at fixed times. *IIE transactions*, 28, 497-510.
- [113] Reynolds, M. R., Amin, R. W. and Arnold, J. C. (1990). CUSUM charts with variable sampling intervals. *Technometrics*, 32, 371-384.
- [114] Reynolds, M. R, Amin, R. W., Arnold, J. C. and Nachlas, J. A. (1988). \bar{X} Charts with Variable Sampling Intervals. *Technometrics*, 30, 181-192.
- [115] Reynolds, M. R. and Arnold, J. C. (1989). Optimal one-sided Shewhart control charts with variable sampling intervals. *Sequential Analysis*, 8, 51-77.
- [116] Reynolds, M. R. and Arnold, J. C. (2001). EWMA control charts with variable sample sizes and variable sampling intervals. *IIE Transactions*, 33, 511-530.
- [117] Reynolds, Jr., M.R. and Stoumbos, Z. (2001). Monitoring the process mean and variance using individual observations and variable sampling intervals. *Journal of Quality Technology*, 33, 181-205.
- [118] Reynolds, M. R., Arnold, J. C. and Baik, J. W. (1996). Variable sampling interval \bar{X} charts in the presence of correlation. *Journal of Quality Technology*, 28, 12-30.
- [119] Reynolds, M. R. and Stoumbos, Z. G. (1998). The SPRT chart for monitoring a proportion. *IIE transactions*, 30, 545-561.
- [120] Roberts, S. W. (1959). Control chart tests based on geometric moving averages. *Technometrics*, 1, 239-250.
- [121] Robinson, P. B. and Ho, T. Y. (1978). Average run lengths of geometric moving averages by numerical methods. *Technometrics*, 20, 85-93

-
- [122] Runger, G. C. and Pignatiello, J. J. (1991). Adaptive sampling for process control. *Journal of Quality Technology*, 23, 135-155.
- [123] Sánchez, I. (2006). Recursive estimation of dynamic models using Cook's distance, with application to wind energy forecast. *Technometrics*, 48, 61-73.
- [124] Sawalapurkar-Powers, U., Arnold, J. C. and Reynolds, M. R. (1990). Variable sample size control charts. In the Annual Meeting of the American Statistical Association, Orlando, FL.
- [125] Schaffer, J. R. and Kim, M. J. (2007). Number of replications required in control chart Monte Carlo simulation studies. *Communications in Statistics Simulation and Computation*, 36, 1075-1087.
- [126] Shewhart, W. A. (1931). Economic control of quality of manufactured product. D. Van Nostrand Company, Inc, The United States of America.
- [127] Shu, L. (2008). An adaptive exponentially weighted moving average control chart for monitoring process variances. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 78, 367-384.
- [128] Shu, L. and Jiang, W. (2006). A Markov chain model for the adaptive CUSUM control chart. *Journal of Quality Technology*, 38, 135-147.
- [129] Shu, L. and Jiang, W. (2008). A new EWMA chart for monitoring process dispersion. *Journal of Quality Technology*, 40, 319-331.
- [130] Shu, L., Jiang W. and Wu Z. (2008). Adaptive CUSUM procedures with Markovian mean estimation. *Computational Statistics & Data Analysis*, 52, 4395-4409.
- [131] Shu, L., Yeung, H. F. and Jiang, W. (2010). An adaptive CUSUM procedure for signaling process variance changes of unknown sizes. *Journal of Quality Technology*, 42, 69-85.
- [132] Siegmund, D. (1985). Sequential analysis: tests and confidence intervals. Springer-Verlag, New York.
- [133] Sparks, R. S. (1998). A CUSUM statistic that adapts to one-step-ahead forecasts for shifts in location. Technical Report No. CMIS 98/12, CSIRO Mathematical and Information Sciences, Australia.
- [134] Sparks, R. (2000). CUSUM charts for signaling varying location shifts. *Journal of Quality Technology*, 32, 157-171.

BIBLIOGRAFÍA

- [135] Srivastava, M. S. and Wu, Y. H. (1993). Comparison of EWMA, CUSUM and Shirayev–Roberts procedures for detecting a shift in the mean. *Annals of Statistics*, 21, 645-670.
- [136] Srivastava, M. S. and Wu, Y. H. (1997). Evaluation of optimum weights and average run lengths in EWMA control schemes. *Communications in Statistics, Theory and Methods*, 26, 1253-1267.
- [137] Steiner, S. H. (1999). Exponentially weighted moving average control charts with time varying control limits and fast initial response. *Journal of Quality Technology*, 31, 75-86.
- [138] Stoumbos, Z. G. and Reynolds, M. R. (1996). Control charts applying a general sequential test at each sampling point. *Sequential Analysis*, 15, 159-183.
- [139] Stoumbos, Z. G. and Reynolds, M. R. (1997). Corrected diffusion theory approximations in evaluating properties of SPRT charts for monitoring a process mean. *Proceedings of the 2nd World Congress of Nonlinear Analysts*, 30, 3987-3996.
- [140] Sweet, A. L. (1986). Control charts using coupled exponentially weighted moving averages. *IIE Transactions*, 18, 26-33.
- [141] Tagaras, G. (1998). A survey of recent developments in the design of adaptive control charts. *Journal of Quality Technology*, 30, 212-231.
- [142] Tuprah, K. and Ncube, M. (1987). A comparison of dispersion quality control charts. *Sequential Analysis*, 6, 155-163.
- [143] Vance, L. C. (1986). Average run lengths of cumulative sum control charts for controlling normal means. *Journal of Quality Technology*, 18, 189-193.
- [144] Van Dobben de Bruyn, C. S. (1968). *Cumulative sum tests: theory and practice*. Griffin's Statistical Monographs & Courses, No. 24, New York: Hafner Publishing.
- [145] Waldmann, K. H. (1986). Bounds for the distribution of the run length of geometric moving average charts. *Applied Statistics*, 35, 151-158.
- [146] Western Electric (1956). *Statistical quality control handbook*. Western Electric Corporation, Indianapolis, Ind.
- [147] Woodall, W. H. (1984). On the Markov chain approach to the two-sided CUSUM procedure. *Technometrics*, 26, 41-46.
- [148] Woodall, W. H. and Adams B. M. (1993). The statistical design of CUSUM charts. *Quality Engineering*, 5, 559-570.

- [149] Woodall, W. H. and Ncube M. M. (1985). Multivariate CUSUM quality-control procedures. *Technometrics*, 27, 285-292.
- [150] Wortham, A. W. and Ringer, L. J. (1971). Control via exponential smoothing. *The Logistics Review*, 7, 33-40.
- [151] Wu, Y. H. (1994). Design of control charts for detecting the change point. In *Change-Point Problems* (E. Carlstein, H. G. Müller and D. Siegmund, eds.) 330-345. IMS, Hayward, CA.
- [152] Wu, S. (2011). Optimal inspection policy for three-state systems monitored by variable sample size control charts. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 55, 689-697.
- [153] Yashchin, E. (1987). Some aspects of the theory of statistical control schemes. *IBM Journal of Research and Development*, 31, 199-205.
- [154] Yashchin, E. (1995). Estimating the current mean of a process subject to abrupt changes. *Technometrics*, 37, 311-323.
- [155] Zhang, J., Li, Z. and Wang, Z. (2012). A new adaptive control chart for monitoring process mean and variability. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 60, 1031-1038.
- [156] Zimmer, L.S., Montgomery, D.C and Runger, G.C. (1998). Evaluation of a three-state adaptive sample size \bar{X} control chart. *International Journal of Production Research*, 36, 733-743.